अरैखिक एवं अस्फुट विश्लेषण में स्थिर बिंदु प्रमेय

पी-एच०डी० (गणित)
उपाधि हेतु प्रस्तुत

शोध-प्रबंध

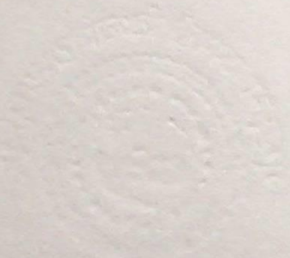


शोध निर्देशक
डॉ० श्याम लाल सिंह
प्रोफेसर एवं डीन

शोध कर्ता
महेश चन्द्र

गणित विभाग, विज्ञान संकाय
गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय
हरिद्वार 249 404

नामांकन संख्या 91004 जुलाई 1994



अरैखिक एवं अस्फुट विश्लेषण में स्थिर बिंदु प्रमेय

पी-एच०डी० (गणित)
उपाधि हेतु प्रस्तुत

शोध-प्रबंध





शोध निर्देशक
डॉ० श्याम लाल सिंह
प्रोफेसर एवं डीन

प्रस्तुत कर्ता
महेश चन्द्र

गणित विभाग, विज्ञान संकाय
गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय
हरिद्वार 249 404

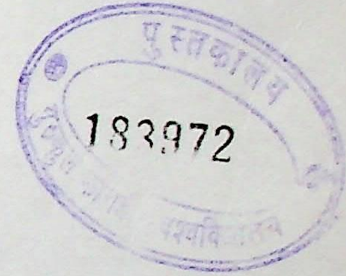
नामांकन संख्या 91004

जुलाई 1994

अरैखिक एवं अस्फुट विश्लेषण में स्थिर बिंदु प्रमेय

पी-एच०डी० (गणित)
उपाधि हेतु प्रस्तुत

शोध-प्रबंध





शोध निर्देशक
डॉ० श्याम लाल सिंह
प्रोफेसर एवं डीन

प्रस्तुत कर्ता
महेश चन्द्र

गणित विभाग, विज्ञान संकाय
गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय
हरिद्वार 249 404

नामांकन संख्या 91004

जुलाई 1994

FIXED POINT THEOREMS IN NONLINEAR AND FUZZY ANALYSIS

BY

MAHESH CHANDRA

THESIS

SUBMITTED FOR THE

DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY

IN

MATHEMATICS

UNDER THE SUPERVISION OF

PROFESSOR S. L. SINGH

GURUKULA KANGRI VISHWAVIDYALAYA

HARDWAR 249404

JULY 1994

ENROLMENT NO. 91004

GURUKULA KANGRI VISHWAVIDYALAYA, HARDWAR

Ph. D. thesis **"Fixed point theorems in nonlinear and fuzzy analysis"** by Mahesh Chandra is hereby forwarded.

V.P. Singh 10.8.94
(V. P. SINGH)
Head, Mathematics Department

S.L. Singh
(S. L. SINGH)
Supervisor
09. 08. 1994

प्राक्कथन

स्वनाम धन्य पूज्य गुरूवर प्रोफेसर एस० एल० सिंह के निर्देशन में हिंदी माध्यम से यह शोध-प्रबंध प्रस्तुत करते हुये मुझे अपार प्रसन्नता का अनुभव हो रहा है. वस्तुत: प्रारम्भ में हिंदी माध्यम से शोध करने का निर्देश जब गुरूदेव (प्रो० सिंह) से मिला था, तो मैं आशंकित था कि क्या मैं इस कठिन दायित्व का सफलता पूर्वक निर्वहन कर पाऊंगा, लेकिन यह पूज्य गुरूवर की असीम कृपा का फल है कि यह शोध-प्रबंध निश्चित अवधि में न केवल पूरा हुआ है अपितु मुझमें राष्ट्रभाषा के प्रति एक गहरे गौरवपूर्ण अहसास का बोध भी हुआ है. इस शोध-प्रबंध का सफल निष्पादन पूज्य गुरूदेव द्वारा प्राप्त सहयोग, सहायता, सफल मार्ग निर्देशन एवं आशीर्वाद के फलस्वरूप ही संभव हो सका है.

गणित जैसे दुरूह एवं क्लिष्ट समझे जाने वाले विषय में हिंदी माध्यम से शोध करने का यह अंकिचन प्रयास प्रोफेसर सिंह की राष्ट्रभाषा के प्रति प्रेम, निष्ठा, समर्पण व सेवा भावना को समर्पित है.

मैं श्री के० एन० बरमोला (प्रवक्ता, भौतिकी विभाग, राजकीय महाविद्यालय, ऋषिकेश) का हृदय से आभारी हूँ जिन्होंने मुझे सर्वप्रथम गुरूदेव प्रोफेसर सिंह के निर्देशन में शोध करने हेतु प्रेरित किया तथा स्वयं ही मेरी जिज्ञासा को माननीय प्रोफेसर सिंह के सम्मुख व्यक्त किया.

मैं माननीया श्रीमती सिंह के विशेष सहयोग एवं सहानुभूति के प्रति अत्यंत ऋणी हूँ जिन्होंने इस शोध कार्य में प्रारम्भ से अन्त तक अपने स्नेह एवं अक्षय वात्सल्य से मेरा मनोबल कायम रखा तथा एक पारिवारिक सदस्य की भांति असीम स्नेह दिया.

इस शोध-प्रबंध में 'केन्द्रीय हिंदी निदेशालय ' (शिक्षा विभाग) द्वारा प्रकाशित "हिंदी वर्तनी मानकीकरण " शीर्षक पुस्तिका में संस्तुत निर्देशों का भरसक पालन करने का प्रयत्न किया गया है. लेकिन कतिपय शब्दों को अध्ययन की दृष्टि से पूर्व प्रचलित रूप में ही प्रयोग किया गया है. परिवर्तित वर्तनी के कुछ रूप इस प्रकार हैं.

पूर्व प्रचलित रूप	नव मान्य रूप
हिन्दी	हिंदी
द्वितीय	द्‌वितीय
प्रबन्ध	प्रबंध
सिद्धान्त	सिद्‌धांत

प्रस्तुत शोध-प्रबंध में वैज्ञानिक एवं तकनीकी शब्दावली आयोग, भारत सरकार द्वारा प्रकाशित "वृहत् पारिभाषिक शब्द संग्रह " का उपयोग किया गया है. हिंदी में पूर्ण विराम (।) के स्थान पर तकनीकी कारणों से अंग्रेजी के पूर्ण विराम (.) का प्रयोग किया गया है.

मैं गुरूकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय के संस्थापक, महर्षि दयानंद के शिष्य और राष्ट्रपिता महात्मा गांधी के सहयोगी महर्षि श्रद्धानंद जी महाराज का सर्वोपरि कृतज्ञ हूँ जिन्होंने भावी पीढ़ी के लिये अध्ययन एवं भारतीय संस्कृति को संरक्षित रखने के लिये इस अद्वितीय शिक्षा मंदिर का निर्माण किया.

मैं प्रो० वी० पी० सिंह (अध्यक्ष, गणित विभाग), डॉ० वी० अरोड़ा, डॉ० एच० एल० गुलाटी, डॉ० एम० पी० सिंह, डॉ० वी० के० शर्मा और विज्ञान महाविद्यालय, गु० कां० वि० हरिद्वार के अन्य विद्वानों तथा कर्मचारियों का इस शोध कार्य के दौरान विशेष सहयोग एवं सहानुभूति के प्रति धन्यवाद ज्ञापित करता हूँ.

मैं उन सभी विद्वानों का भी मन से आभारी हूँ जिनकी रचनाओं, शोध पत्रों एवं परामर्शों से मैं प्रत्यक्ष अथवा परोक्ष रूप से लाभान्वित हुआ हूँ. मैं डॉ० जे० विद्यालंकार (पुस्तकालयाध्यक्ष, गु० कां० वि०, हरिद्वार) का भी आभारी हूँ जिन्होंने सीमित साधनों के बावजूद अपने प्रयासों से अध्ययन सामग्री उपलब्ध कराने में विशेष सहयोग दिया.

इस अवसर पर मैं अपने बड़े भाई श्री एल० पी० जोशी (सहायक अभियन्ता) एवं श्री टी० एस० रौतेला (सहा० अभि०, टी.एच.डी.सी., ऋषिकेश), श्री एल० पी० पुरोहित तथा श्री आर० के० त्यागी का हृदय से आभार व्यक्त करता हूँ जिनके समयानुकूल प्रेरणादायक एवं उत्साहवर्धक प्रसंगों से इस कार्य को सम्पन्न करने में विशेष सहायता मिली है.

अंततः मैं टंकक श्री विमलेश बहुगुणा, ऋषिकेश का इस शोध-प्रबंध के कुशल टंकण हेतु हार्दिक धन्यवाद करता हूँ.

30 जुलाई 1994

महेश चन्द्र
महेश चन्द्र

अनुक्रमणिका

पृष्ठ संख्या

अध्याय I

भूमिका

यह अध्याय पूर्ण रूपेण परिचयात्मक है. बानाख़ संकुचन सिद्धांत एवं इसके कुछ सफल व्यापकीकरणों यथा युंक संकुचन सिद्धांत, नाडलर बहुमानी संकुचन सिद्धांत आदि तथा संकर संकुचनों का संक्षिप्त विवरण प्रस्तुत किया गया है. साथ में एल. जादेह द्वारा अन्वेषित अस्फुट समुच्चयों एवं अस्फुट विश्लेषण में स्थिर बिंदुओं के अध्ययन पर भी संक्षिप्त परिचय प्रस्तुत करने का प्रयास किया गया है. अंत में शेष अध्यायों में किये गये कार्य की रूपरेखा पर प्रकाश डाला गया है.

इस अध्याय के निम्न अनुभाग हैं :

1. प्रारम्भिकी
2. बानाख़ संकुचन सिद्धांत
3. युंक संकुचन सिद्धांत
4. बहुमानी एवं संकर संकुचन प्रतिचित्रण
5. अस्फुट समुच्चय
6. आगामी अध्यायों की रूपरेखा

1

प्रारम्भिकी

प्रायोगिक गणित के सफल साधनों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय की उपयोगिता को मद्देनजर रखते हुये विगत कुछ दशकों में विभिन्न समष्टियों यथा दूरीक, २-दूरीक, सांस्थितिक, बानाख़, हिलबर्ट, प्रायिकतात्मक, समपरिवेश एवं यादृच्छिक मानकित समष्टियों पर वृहत् रूप में स्थिर बिंदुओं का अध्ययन हुआ है तथा अब भी स्थिर बिंदुओं का अध्ययन, गणितज्ञों एवं शोधकर्ताओं को निरन्तर आकर्षित किये जा रहा है. स्थिर बिंदु सिद्धांत के विगत साहित्य का अध्ययन करने पर यह स्पष्ट होता है कि स्थिर बिंदु प्रमेयों की उपयोगिता एवं व्यावहारिकता को किसी निश्चित क्षेत्र तक परिबद्ध करना न्यायोचित नहीं है. स्थिर बिंदु प्रमेय अवकल-समाकल समीकरणों, अर्थशास्त्र, क्रीड़ा सिद्धांत, अभिकलित्रीय विज्ञान, फलन विश्लेषण, गति विज्ञान एवं इष्टतम संचालन आदि अनेक क्षेत्रों में प्रमुख भूमिका निभाता रहा है. सन् 1910 में एल. ब्रावर ने परिबद्ध n-गोले पर स्थिर बिंदुओं का अध्ययन करते हुये प्रदर्शित किया कि परिबद्ध n-गोले पर संतत स्वप्रतिचित्रण एक स्थिर बिंदु रखता है तत्पश्चात कुछ गणितज्ञों ने ब्रावर के परिणाम को व्यापकीकृत किया एंव अनेक स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किये, किन्तु प्रायोगिक गणित के क्षेत्र में बानाख़ द्वारा स्थापित प्रमेय विशेष महत्व रखता है.

सन् 1922 में स्टीफन बानाख़ ने किसी पूर्ण दूरीक समष्टि पर संकुचन प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदुओं का अध्ययन किया तथा एक स्थिर बिंदु सिद्धांत प्रतिपादित किया जो बानाख़ संकुचन सिद्धांत के नाम से सुज्ञात है.

किसी दूरीक समष्टि X पर कोई स्पप्रतिचित्रण T संकुचन प्रतिचित्रण होता है यदि X के प्रत्येक अवयव x, y के लिये किसी स्थिरांक $0 \leq k < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि

(1.1) $d(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y).$

2
बानाख़ संकुचन सिद्धांत

किसी पूर्ण दूरीक समष्टि X पर बानाख़ संकुचन प्रतिचित्रण T एक अद्वितीय स्थिर बिंदु रखता है, अर्थात् X में एक और केवल एक बिंदु z का इस प्रकार अस्तित्व होता है कि

$$Tz = z.$$

कालान्तर में कई गणितज्ञों ने इस सिद्धांत को विभिन्न परिस्थितियों में विभिन्न समष्टियों पर व्यापकीकृत करते हुए कई महत्वपूर्ण स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किये (देखें, उदाहरणार्थ, [49], [14], [17], [18], [21], [25], [28], [31], [32], [33], [35], [37], [40], [42], [43], [51], [56], [58], [60], [61], [62], [75], [76], [77], [89], [97], [106], [113], [117], [118], [121], [134], [136], [141], [149], [153], [162], [171], [174], व [178]).

इसी क्रम में बानाख़ संकुचन सिद्धांत को विस्तारित करते हुए युंक [75] ने 1976 में दूरीक समष्टि पर दो क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु एक स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किया. यह प्रमेय सामान्यतया युंक संकुचन सिद्धांत के नाम से जाना जाता है.

3
युंक संकुचन सिद्धांत

मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा S और T समष्टि X पर ऐसे क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण हैं कि $S(X) \subset T(X)$ और T(X) समष्टि X का एक पूर्ण उपसमष्टि है. यदि स्थिरांक $0 < k < 1$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि X के प्रत्येक अवयव x, y के लिए

(3.1) $d(Sx, Sy) \leq k\, d(Tx, Ty)$

तब प्रतिचित्रण युग्म (S, T) के लिये समष्टि X में एक उभयनिष्ठ

स्थिर बिंदु होता है, अर्थात् X में एक और केवल एक ऐसे बिंदु z का अस्तित्व होता है कि $Sz = z = Tz$.

यह स्पष्ट है कि शर्त (3.1) में T को तत्समक प्रतिचित्रण लेने पर बानाख़ संकुचन सिद्धांत प्राप्त होता है.

युंक संकुचन सिद्धांत से स्थिर बिंदु प्रमेयों के अध्ययन में एक नई दिशा का सूत्रपात हुआ. अनेक गणितज्ञों ने युंक संकुचन सिद्धांत को विस्तारित एवं व्यापकीकृत किया तथा दो या दो से अधिक प्रतिचित्रणों के लिये, जो एक या एक से अधिक प्रतिचित्रणों के साथ परस्पर क्रमविनिमयी हैं; स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किये (देखें, उदाहरणार्थ [31], [42], [74], [76], [77], [78], [82], [89], [106], [108], [154], [171]).

इसी प्रकार क्रमविनिमयता की शर्त को शिथिल करके दुर्बल क्रमविनिमयी, दुर्बल* क्रमविनिमयी एवं उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों की संकल्पना प्रस्तुत की गयी तथा युंक संकुचन सिद्धांत के अनेक महत्वपूर्ण व्यापकीकरण प्राप्त हुये (देखें, उदाहरणार्थ [31], [42], [74], [79], [106], [107], [108], [112], [113], [154], [157]).

समष्टि X पर कोई स्वप्रतिचित्रण अविस्तारी प्रतिचित्रण कहलाता है यदि X के प्रत्येक अवयव x, y के लिये

(3.2) $$d(Tx, Ty) \le d(x, y)$$

उदाहरणतया, तत्समक प्रतिचित्रण, समदूरीक प्रतिचित्रण एवं स्थानान्तरण प्रतिचित्रण आदि अविस्तारी प्रतिचित्रण हैं. यह स्पष्ट है कि अविस्तारी प्रतिचित्रण, संकुचन प्रतिचित्रणों के व्यापक स्वरूप हैं तथा अविस्तारी प्रतिचित्रणों हेतु यह आवश्यक नहीं है कि स्थिर बिंदुओं का अस्तित्व अद्वितीय हो.

स्थिर बिंदु सिद्धांत के वृहत् साहित्य से प्रतीत होता है कि दूरीक, बानाख़, हिलबर्ट, हाउसडॉर्फ आदि समष्टियों पर अविस्तारी एवं अविस्तारी प्रकार के प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व पर गहन अध्ययन हुआ है तथा अनेक महत्वपूर्ण

परिणाम प्राप्त किये गये हैं (देखें, उदाहरणार्थ [6], [24], [45]-[47], [67], [69], [69], 83], [119], [127], [144], [145], [146], [179], [180], [181]).

4

बहुमानी एवं संकर संकुचन प्रतिचित्रण

गणितीय विज्ञान में बहुमानी प्रतिचित्रणों का विशेष महत्व है. वस्तुतः हाउसडॉर्फ दूरीक का प्रयोग करते हुए नाडलर [100] एवं मार्किन [99] ने बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व का अध्ययन प्रारम्भ किया.

समष्टि X से X के अरिक्त उपसमुच्चयों की समष्टि पर कोई प्रतिचित्रण T बहुमानी संकुचन प्रतिचित्रण होता है यदि X के प्रत्येक अवयव x, y के लिये $0 \leq k < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि

(4.1) $$H(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

यह स्पष्ट है कि यदि T एकमानी प्रतिचित्रण लिया जाय तब बानाख़ संकुचन शर्त प्राप्त होती है.

नाडलर [100] ने बहुमानी संकुचन प्रतिचित्रणों हेतु पूर्ण दूरीक समष्टि पर एक स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किया जो नाडलर संकुचन सिद्धांत के नाम से जाना जाता है. (देखें, अध्याय III) तत्पश्चात् कई गणितज्ञों ने नाडलर संकुचन सिद्धांत को विस्तारित , व्यापकीकृत एवं उन्नत करते हुए कई प्रमुख स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किये (देखें, उदाहरणार्थ [1], [3], [10], [11], [23], [24], [27], 30], [41], [43], [49], [50], [51], [52], [57], [63], [67], [68], [69], [70], [71], [80], [81], [82], [84], [91], [93], [98], [125], [137], [155], [169], [177], [185]).

दूसरी ओर सिंह एवं कुलश्रेष्ठ [159]-[160] ने एकमानी एंव बहुमानी प्रतिचित्रणों के लिये व्यापक संकर संकुचन शर्त की संकल्पना प्रस्तुत की तथा कुछ संपात बिंदु प्रमेय स्थापित किये, यहाँ सिंह एवं कुलश्रेष्ठ द्वारा प्राप्त परिणाम का उल्लेख करना आवश्यक प्रतीत होता है.

प्रमेय 4.1 [159]. मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि हैं तथा T समष्टि X से $CL(X)$ पर बहुमानी प्रतिचित्रण है. यदि $f : X \to X$ एवं धनात्मक पूर्णांक $q < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि $T(X) \subset f(X)$ तथा $f(X)$, (T, f)-कक्षतः पूर्ण हो एवं X के सभी अवयवों x, y के लिये

$$(4.2) \qquad H(Tx, Ty) \leq q \text{ अधि} \{ d(fx, fy), d(fx, Tx), d(fy, Ty), [d(fx, Ty) + d(fy, Tx)]/2 \}$$

तो X में T तथा f के लिये एक संपात बिंदु होता है, अर्थात् X में एक ऐसे बिंदु z का अस्तित्व मिलता है कि $fz \in Tz$.

उल्लेखनीय है कि यदि संकुचन शर्त (4.2) में f तत्समक प्रतिचित्रण हो तो किरिक [27] द्वारा अन्वेषित व्यापक बहुमानी संकुचन शर्त (देखें, अध्याय III, प्रमेय 3.1) प्राप्त होती है.

उपर्युक्त परिणाम को रोड्स, सिंह एवं कुलश्रेष्ठ [135], सिंह, हा एवं चो [158] तथा अन्य कई गणितज्ञों द्वारा उन्नत एवं विस्तारित करते हुये अनेक महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त किये गये. शास्त्री, राव एवं राव ने निम्न उदाहरण द्वारा दिखाया कि प्रमेय 4.1 की शर्तें वास्तव में प्रतिचित्रण T हेतु स्थिर बिंदु के अस्तित्व के लिये पर्याप्त नहीं है.

उदाहरण 4.1. यदि $M = [0, \infty)$ एवं सभी $x, y, \in M$ के लिये $fx = 2x$ तथा $Px = [1 + x, \infty)$.

साथ ही शास्त्री, राव एवं राव ने सिंह एवं कुलश्रेष्ठ [159] में उठाये गये इस प्रश्न, कि प्रमेय में कौन सी शर्तें जोड़ी जांय कि f एवं T हेतु उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु का अस्तित्व प्राप्त हो जाय,

का निम्न शर्तें जोड़कर उत्तर देने का सफल प्रयास किया है.

(i) T समुच्चय $\overline{\bigcup_{x \in X} T(x)}$ पर संतत हो,

(ii) X के सभी x, y, z के लिए $fx \in Ty$ के साथ $d(fx, fy) \leq H(Tfy, Tfz)$.

इसी क्रम में यहां संकर संकुचन के लिये मुखर्जी [98] की प्रमेय का उल्लेख करना न्यायोचित होगा जो दो संकर प्रतिचित्रणों के उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु का दावा करती है.

प्रमेय **4.2 [98] .** मान लें (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है, f समष्टि X पर संतत स्वप्रतिचित्रण है एवं $T : X \to CL(X)$ एक बहुमानी प्रतिचित्रण है, यदि f एवं T क्रमविनिमयी हों, दिये हुये बिंदु $x_0 \in X$ के लिये x_1 का इस प्रकार अस्तित्व हो कि $fx_1 \in Tx_0$ तथा X के प्रत्येक अवयव x, y के लिये $0 < q < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि

$$H(Tx, Ty) \leq q\, d(fx, fy)$$

तो समष्टि X में बिंदु z का अस्तित्व इस प्रकार मिलता है कि $z = fz \in Tz$, अर्थात् f एवं T के लिये बिंदु z एक उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है.

नैम्पली, सिंह एवं ह्विटफील्ड [102] ने उदाहरण देकर स्पष्ट किया कि उपर्युक्त परिणाम (प्रमेय 4.2) की शर्तें स्थिर बिंदु के अस्तित्व के लिये पर्याप्त नहीं हैं. स्थिर बिंदु सिद्धांत के साहित्य में संकर प्रतिचित्रणों हेतु विभिन्न समष्टियों यथा दूरीक, 2-दूरीक, समपरिवेश आदि पर अनेक महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त किये गये हैं (देखें, उदाहरणार्थ [7], [26], [42], [44], [95], [105], [102], [135], [156], [157], [158], [163], [164], [167]).

5
अस्फुट समुच्चय

एल. जादेह [187] द्वारा अन्वेषित अस्फुट समुच्चय की अवधारणा से गणितीय विज्ञान तथा अन्य अनेक क्षेत्रों में एक नये युग का प्रादुर्भाव हुआ. अर्थशास्त्रियों, जैव वैज्ञानिकों, गणितज्ञों, भौतिक शास्त्रियों तथा अन्य द्वारा अनेक क्षेत्रों में अस्फुट समुच्चयों का वृहत् रूप में उपयोग किया जा रहा है. प्रोफेसर जादेह [187] द्वारा प्रतिपादित अस्फुट समुच्चय की प्रवृति का प्रयोग एक ऐसे गणितीय ढ़ांचों, जो एक ऐसी प्रक्रिया या पद्धति है जो नैज अनिश्चितताओं के द्वारा उत्पन्न होती है, को विकसित करने के लिये उपयोग की जा रही है. प्रोफेसर जादेह का यह महत्वपूर्ण अनुसंधान गणित, अभियांत्रिकी, अभिकलित्रीय विज्ञान, जैविक विज्ञान एवं आर्थिक क्षेत्रों में वैज्ञानिकों को निरन्तर नये-नये शोध के लिये प्रेरित कर रहा है. सर्वप्रथम गणितज्ञों द्वारा अस्फुट समुच्चयों का सांस्थितिकी के क्षेत्र में बड़े पैमाने पर अध्ययन किया गया.

परिभाषा **5.1.** मान लें X एक समुच्चय है. X में अस्फुट समुच्चय (उपसमुच्चय) A को एक फलन $M : X \rightarrow [0, 1]$ द्वारा पारिभाषित करते हैं, जहां $M_A(x)$ समुच्चय A पर बिंदु x के लिये सदस्यता संतुलन प्रदर्शित करता है. फलन M को सदस्यता फलन कहते हैं.

अस्फुट समुच्चय सिद्धांत के विकास में अनेक गणितज्ञों द्वारा अस्फुट दूरीक समष्टि को विभिन्न रूपों में पारिभाषित किया गया है. हम इनको मुख्यत: दो भागों में विभाजित कर सकते हैं. प्रथम, जिसमें अस्फुट अवयवों के बीच सामान्य (गणनात्मक) दूरीक का प्रयोग किया गया है तथा द्वितीय, जिसमें अवयवों के बीच अस्फुट दूरी को लेकर अस्फुट दूरीक समष्टि को पारिभाषित किया गया है (देखें, उदाहरणार्थ [8], [13], [20], [55], [87]). क्रामोसिल एवं माइकलेक [87] द्वारा पारिभाषित अस्फुट दूरीक समष्टि से इस क्षेत्र में स्थिर बिंदु के अस्तित्व का अध्ययन रूचिकर एवं महत्वपूर्ण हुआ है. वास्तव में क्रामोसिल एवं माइकलेक [87]

द्वारा प्रयुक्त परिभाषा निम्नवत् है.

परिभाषा **5.3 [87]**. द्विआधारी संक्रिया $* \ [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ (संतत) t-मानक होता है यदि $([0, 1], *)$ इकाई 1 के साथ आवेली मोनोइड इस प्रकार हो कि $a * b \leq c * d$ जहाँ $a \leq c$ तथा $b \leq d$, $(a, b, c, d \in [0, 1])$.

परिभाषा **5.3 [87]**. त्रिक् $(X, M, *)$ एक अस्फुट दूरीक समष्टि होता है यदि X एक मनमाना समुच्चय हो, $*$ एक संतत t-मानक हो तथा M एक अस्फुट समुच्चय $X^2 \times [0, \infty)$ इस प्रकार हो कि

(i) $M(x, y, 0) = 0$,

(ii) प्रत्येक $t > 0$ के लिये $M(x, y, t) = 1$ यदि और केवल यदि $x = y$,

(iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$

(iv) $M(x, y, t) * M(y, z, s) = M(x, z, t+s)$

(v) प्रत्येक $x, y, z \in X$, $t, s > 0$ के लिये $M(x, y, .) : [0, \infty) \to [0, 1]$ वाम-संतत हो.

अस्फुट दूरीक समष्टि की उपर्युक्त परिभाषा को लेकर ग्रेबियक [48] ने बानाख़ संकुचन सिद्धांत को अस्फुट दूरीक समष्टि हेतु व्यापकीकृत किया. तत्पश्चात्, अनेक गणितज्ञों ने संकुचन प्रतिचित्रणों हेतु अस्फुट दूरीक समष्टि पर अनेक महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त किये हैं (देखें, उदाहरणार्थ [8], [13], [48], [94], 151], [165], [170], [182], [183]).

6
आगामी अध्यायों की रूप रेखा

इस शोध-प्रबंध में इस परिचयात्मक अध्याय के अतिरिक्त पांच अन्य अध्याय सम्मिलित है.

अध्याय II में पूर्ण दूरीक समष्टि पर एकमानी प्रतिचित्रण युग्मों हेतु स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व का अध्ययन किया गया है. इस अध्याय के मुख्य परिणाम हिक्स एवं रोड्स [61], हिक्स [56], [58] आदि के परिणामों को दो प्रतिचित्रणों हेतु विस्तारित एवं व्यापकीकृत करते हैं. इसमें स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व पर कई सुज्ञात स्थिर बिंदु प्रमेयों को उपप्रमेयों के रूप में प्राप्त किया गया है.

अध्याय III पूर्णतया बहुमानी संकुचन प्रतिचित्रणों एवं संकर संकुचन प्रतिचित्रणों पर आधारित है. इस अध्याय में कई स्थिर एवं संपात बिंदु प्रमेय प्रतिपादित किये गये हैं. जो डी. डलबॉस्को [32], एस० सेसा [149] आदि के परिणामों को विस्तारित एवं व्यापकीकृत करते हैं.

अध्याय IV में संकर अप्रसारी प्रकार के बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु संपात बिंदुओं के अस्तित्व पर कुछ प्रमेय स्थापित किये गये हैं तथा अप्रसारीय बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय उपप्रमेय के रूप में प्राप्त किये गये हैं. यह प्रमेय किरिक [27]-[28] सिंह एवं कुलश्रेष्ठ [159] तथा अन्य कई प्रमेयों को विस्तारित एवं व्यापकीकृत करते हैं.

अध्याय V में बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु बानाख़ प्रकार के कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किये गये हैं तथा कई जटिल संकुचनीय शर्तों के अधीन स्थिर बिंदु प्रमेयों को उपप्रमेयों के रूप में प्राप्त किया गया है.

अंतिम अध्याय में ग्रेबियक [48] तथा मिश्रा, शर्मा एवं सिंह [94] का अनुसरण करते हुये अस्फुट दूरीक समष्टि पर स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किये हैं. यह प्रमेय ग्रेबियक द्वारा प्राप्त अस्फुट बानाख़ संकुचन सिद्धांत तथा अन्य कई सुज्ञात परिणामों को व्यापकीकृत करते हैं तथा हिक्स एवं रोड्स [61], हिक्स [56], [58] आदि के परिणामों को अस्फुट दूरीक समष्टि हेतु विस्तारित करते हैं.

* * * * *

अध्याय II

प्रतिचित्रण युग्मों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

इस अध्याय में पूर्ण दूरीक समष्टि पर प्रतिचित्रण युग्म हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय प्रतिपादित किये गये हैं. यह प्रमेय हिक्स तथा रोड्स [61] एवं हिक्स [56] के परिणामों को विस्तारित एवं व्यापकीकृत करते हैं. इस अध्याय के प्रमुख अनुभाग हैं :

1. प्रारम्भिकी
2. परिणाम
3. उदाहरण एवं टिप्पणियां

1
प्रारम्भिकी

मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा T समष्टि X पर स्वप्रतिचित्रण है, ऋणेत्तर संख्याओं के समुच्चय को R_+ निरूपित करेगा, अर्थात् $R_+ = \{x : x \geq 0\}$.

परिभाषा **1.1.** समष्टि X के किसी बिंदु x के लिये अनुक्रम $O(x, \infty) = \{x, Tx, T^2x, \ldots\}$ बिंदु x पर T का कक्षक होता है.

परिभाषा **1.2.** समष्टि X के किसी बिंदु z पर फलन $G : X \to R_+$ को T-कक्षतः निम्न अर्धसंतत कहते हैं यदि $O(x, \infty)$ का कोई अनुक्रम $\{x_n\}$ बिंदु z पर अभिसरित होने का अर्थ हो कि $G(z) \leq$ सीमा$_n$ निम्नक $G(x_n)$.

बानाख़ संकुचन प्रतिचित्रण को विस्तारित एवं व्यापकीकृत करते हुए हिक्स एवं रोड्स [61] ने ऐसे प्रतिचित्रणों का अध्ययन किया जो निम्न संकुचन शर्त (1.1) संतुष्ट करते हैं.

किसी बिंदु $x \in X, 0 < k < 1$

(1.1) $$d(Tx, T^2x) \leq k\, d(x, Tx).$$

प्रोफसर रोड्स [121] के अनुसार संकुचन शर्तों (1), (4), (5), (7), (9), (11), (18'), व (19) द्वारा हम शर्त (21') प्राप्त कर सकते हैं. शर्त (21') निम्नवत है.

प्रत्येक $x, y \in X, 0 \leq h < 1$,

(21') $$d(Tx, Ty) \leq h \text{ अधि } \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), [d(x, Ty) + d(y, Tx)]/2\}.$$

यह स्पष्ट है कि (21') में $y = Tx$ लेने पर हमें शर्त (1.1) प्राप्त होती है (देखें, [61]). वास्तव में हिक्स एवं रोड्स द्वारा प्राप्त परिणाम निम्नवत् है.

प्रमेय **1.1.** मान लें (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा $T : X \rightarrow X$. यदि धनात्मक संख्या $h < 1$ के लिये समष्टि X में कोई बिंदु x इस प्रकार है कि प्रत्येक $y \in O(x, \infty)$ के लिये शर्त (1.1) संतुष्ट होती हो तो

(i) सीमा$_n$ $T^n x = z$ का आस्तित्व मिलता है,

(ii) $d(T^n x, z) \leq h^n (1 - h)^{-1} d(x, Tx)$,

(iii) बिंदु z प्रतिचित्रण T का एक स्थिर बिंदु होगा यदि और केवल यदि फलन $G(x) = d(x, Tx)$ बिंदु z पर T-कक्षत: निम्न अर्धसंतत हो.

हाल ही में हिक्स [56], [60] ने संकुचन शर्त (1.1) को लेकर कल्प-दूरीक समष्टि एवं d-पूर्ण सांस्थितिक समष्टि पर कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किये हैं. हम इस अध्याय में पूर्ण दूरीक समष्टि पर प्रतिचित्रण युग्मों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय प्रतिपादित करेंगे. यह प्रमेय हिक्स एंव रोड्स [61] तथा हिक्स [56] के परिणामों कोविस्तारित एंव व्यापकीकृत करते हैं.

2

परिणाम

प्रमेय 2.1. मान लें (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा T समष्टि X पर संतत स्वप्रतिचित्रण है. यदि X पर किसी स्वप्रतिचित्रण f का इस प्रकार अस्तित्व हो कि

प्रत्येक $x \in X$, $0 < k < 1$,

(2.1) $d(Tx, fTx) \le kd(x, Tx)$ स्वम्

(2.1′) $d(fx, Tfx) \le kd(x, fx)$

तो समष्टि X में प्रतिचित्रण T तथा f के लिये एक उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु का अस्तित्व होता है, अर्थात् X में बिंदु z का इस प्रकार अस्तित्व मिलता है कि $Tz = z = fz$.

उपपत्ति. मान लें $x_0 \in X$.
हम X में अनुक्रम $\{x_n\}$ की रचना इस प्रकार करते हैं कि $x_1 = Tx_0$, $x_2 = fx_1$, $x_3 = Tx_2$, - - - . व्यापक रूप में सभी $n = 0, 1, 2,$ - - - के लिये $x_{2n+1} = Tx_{2n}$ एंव $x_{2n+2} = fx_{2n+1}$.
अतः शर्त (2.1) द्वारा

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d(Tx_{2n}, fx_{2n+1}) \\ &= d(Tx_{2n}, fTx_{2n}) \\ &\le kd(x_{2n}, Tx_{2n}) \\ &\le kd(x_{2n}, x_{2n+1}); \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

इसी प्रकार (2.1′) द्वारा $d(x_{2n}, x_{2n+1}) \le kd(x_{2n-1}, x_{2n})$; $n = 1, 2, \ldots$

अतः यह स्पष्ट है कि अनुक्रम $\{x_n\}$ समष्टि X का कौशी

अनुक्रम है. चूंकि X पूर्ण दूरीक समष्टि है इसलिये अनुक्रम $\{x_{2n}\}$ समष्टि X के किसी बिंदु z पर अभिसरित होगा. पुन: T संतत प्रतिचित्रण है इसलिये $x_{2n} \to z \Rightarrow Tx_{2n} \to Tz$.
अत:

$$d(z, Tz) \leq d(z, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, Tz)$$

$$\leq d(z, x_{2n+1}) + d(Tx_{2n}, Tz)$$

अब n का सीमांत मान लेने पर

$d(z, Tz) = 0$, अर्थात् z प्रतिचित्रण T का एक स्थिर बिंदु है.
पुन: शर्त (2.1) द्वारा

$$d(z, fz) = d(Tz, fTz)$$

$$\leq kd(z, Tz).$$

अत: $d(z, fz) = 0$, अर्थात् प्रतिचित्रण f के लिये बिंदु z एक स्थिर बिंदु है. परिणामत:

$$Tz = z = fz.$$

यह उल्लेखनीय है कि प्रमेय 2.1 अन्य कई सुज्ञात स्थिर बिंदु प्रमेयों को व्यापकीकृत करता है.

उपप्रमेय 2.2 ([121], प्रमेय 14). मान लें (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा $S, T : X \to X$. यदि $0 \leq k < 1$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि प्रत्येक $x, y \in X$ के लिये

$$(2.2) \quad d(Sx, Ty) \leq k.\ \text{अधि}\{d(x, y), d(x, Sx), d(y, Ty), [d(x, Ty) + d(y, Sx)] / 2\}$$

तो X में प्रतिचित्रण S तथा T के लिये एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु का अस्तित्व होता है.

उपपत्ति. शर्त (2.2) में $y = Sx$ लेने पर

$$d(Sx, TSx) \leq k.\text{ अधि}\{d(x, Sx), d(x, Sx), d(Sx, TSx), [d(x, TSx) + d(Sx, Sx)]/2\}$$

$$\leq k.\text{ अधि}\{d(x, Sx), d(x, TSx)/2\}.$$

यदि $d(Sx, TSx) \leq kd(x, TSx)/2$ तब

$$2d(Sx, TSx) \leq k[d(x, Sx) + d(Sx, TSx)].$$

अत:

$$d(Sx, TSx) \leq (k/(2 - k))\, d(x, Sx) < kd(x, Sx),$$

अर्थात् सभी $x \in X$ के लिये

$$d(Sx, TSx) \leq kd(x, Sx).$$

अत: प्रमेय 2.1 द्वारा हम परिणाम प्राप्त कर सकते हैं.

उपप्रमेय 2.2 में शर्त (2.2) के स्थान पर निम्न शर्त (2.3) लेने पर निम्न परिणाम प्राप्त होता है.

उपप्रमेय **2.3.** मान लें (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है. $S, T : X \to X$. यदि $0 \leq k < 1/2$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि प्रत्येक $x, y \in X$ के लिये

(2.3) $$d(Sx, Ty) \leq k.\text{ अधि}\{d(x, y), d(x, Sx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Sx)\}$$

तो X में प्रतिचित्रण S एवं T के लिये एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु का अस्तित्व होता है.

उपपत्ति. शर्त (2.3) में $y = Sx$ लेने पर

$$d(Sx, TSx) \le k \text{ अधि } \{d(x, Sx), d(x, TSx)\}$$

$$\le k\,[d(x, Sx) + d(Sx, TSx)].$$

अत:

$$d(Sx, TSx) \le k(1-k)^{-1} d(x, Sx) \text{ एवं } 0 \le k(1-k)^{-1} < 1.$$

पुन: प्रमेय 2.1 द्वारा हम परिणाम प्राप्त कर सकते हैं.

उपप्रमेय **2.4.** मान लें (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है. $S, T : X \to X$. यदि प्रत्येक $x, y \in X$ के लिये $b \ge 0$, $1 < c < 2$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि

$$(2.4) \qquad d(Sx, Ty) \le [cd(x, Sx)\, d(y, Ty) + bd(x, Ty)\, d(y, Sx)] \,/\, [d(x, Sx) + d(y, Ty)],$$

जहाँ $d(x, Sx) + d(y, Ty) \ne 0$ तथा
यदि $d(x, Sx) + d(y, Ty) = 0$ तब $d(Sx, Ty) = 0$,
तो X में S तथा T के लिये एक उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु का अस्तित्व होता है.

उपपत्ति. शर्त (2.4) में $y = Sx$ लेने पर

$$d(Sx, TSx) \le cd(x, Sx)\, d(Sx, TSx)/((d(x, Sx) + d(Sx, TSx)).$$

अत:

$$d(Sx, TSx) \le (c-1)\, d(x, Sx)$$

पुन: प्रमेय 2.1 द्वारा परिणाम प्राप्त कर सकते हैं.

उपप्रमेय **2.5**. मान लें (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है. $S, T : X \to X$. यदि प्रत्येक $x, y \in X$ के लिये $0 \leq b < 1$, $c > 0$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि

$$(2.5) \qquad [d(Sx, Ty)]^2 \leq bd(x, Sx)\, d(y, Ty) + cd(x, Ty)d(y, Sx),$$

तो X में प्रतिचित्रण S तथा T के लिये एक उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु का अस्तित्व होता है.

उपपत्ति. शर्त (2.5) में $y = Sx$ लेने पर

$$[d(Sx, TSx)]^2 \leq bd(x, Sx)d(Sx, TSx) + cd(x,TSx)\; d(Sx, Sx)$$

अत: यह स्पष्ट है कि $d(Sx, TSx) \leq bd(x, Sx)$. पुन: प्रमेय 2.1 द्वारा हम परिणाम प्राप्त कर सकते हैं.

उपप्रमेय **2.6.** मान लें (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा $S, T : X \to X$. यदि प्रत्येक $x, y \in X$ के लिये $0 < c < 1$ का आस्तित्व इस प्रकार हो कि

$$(2.6) \quad d(Sx, Ty) \leq (c[d(x, Sx)]^2 + [d(y, Ty)]^2)/((d(x, Ty) + d(y, Sx)),$$

जहाँ $d(x, Sx) + d(y, Ty) \neq 0$, तो X में S तथा T के लिये एक उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु का अस्तित्व होता है.

उपपत्ति. शर्त (2.6) में $y = Sx$ लेने पर

$$d(Sx, TSx) \leq (c[d(x, Sx)]^2 \;\; [d(Sx, TSx)]^2) / (d(x, Sx) + d(Sx, TSx)),$$

अर्थात्

$$d(Sx, TSx)\, d(x, Sx) + [d(Sx, TSx)]^2 \leq c[d(x, Sx)]^2 + d(Sx, TSx)]^2.$$

परिणामत:

$$d(Sx, TSx) \le c\, d(x, Sx).$$

पुन: प्रमेय 2.1 द्वारा हम परिणाम प्राप्त कर सकते हैं.

3

उदाहरण एवं टिप्पणियां

निम्न उदाहरण स्पष्ट करता है कि प्रमेय 2.1 प्रमेय 1.1 को व्यापकीकृत करता है.

उदाहरण **3.1.** मान लें $X = [1/2, 2]$ तथा X का कोई स्वप्रतिचित्रण T इस प्रकार है कि $Tx = 1/x$

यह स्पष्ट है कि X के किसी भी बिंदु x के लिये शर्त (1.1) संतुष्ट नहीं है अन्यथा

$$d(Tx, T^2x) = \left|\frac{1 - x^2}{2}\right|$$ एवं

$$d(x, Tx) = \left|\frac{1 - x^2}{2}\right|$$

अर्थात् $d(Tx, T^2x) = d(x, Tx)$ जो ~~कि~~ (1·1) का एक विरोधाभास है.
पुन: यदि प्रतिचित्रण $f : X \to X$ इस प्रकार लें कि $fx = \frac{x+2}{2x+1}$ तब

$$d(Tx, fTx) = |2(x^2-1)/x(x+2)|$$
$$d(x, Tx) = \left|\frac{x^2-1}{x}\right|$$
$$d(fx, Tfx) = \left|\frac{3(x^2-1)}{(x+2)(2x+1)}\right|$$
$$d(x, fx) = \left|\frac{2(x^2-1)}{2x+1}\right|$$

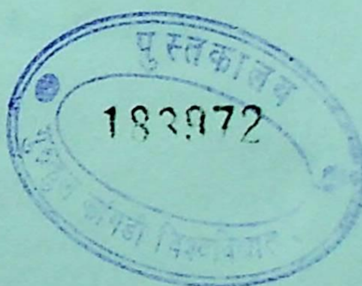
यदि $1 > k \geq 4/5$ लें तो X के प्रत्येक अवयव x के लिये शर्त (2.1) व (2.1′) सन्तुष्ट होती है एवं T तथा f के लिये 1 एक उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है.

टिप्पणी **3.1.** प्रमेय 1.1 में यदि T एक संतत प्रतिचित्रण हो तो यह आवश्यक नहीं है कि X में T के लिये स्थिर बिंदु का अस्तित्व अद्वितीय होगा. (उदाहरणार्थ, देखें, [61], उदाहरण 4).

टिप्पणी **3.2.** यदि प्रमेय 2.1 में $f = T$ लिया जाय तब हमें प्रमेय 1.1 प्राप्त होता है जो कई अन्य स्थिर बिंदु प्रमेयों को व्यापकीकृत करता है.

टिप्पणी **3.3.** उपप्रमेय 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, व 2.6 में $S = T$ लेने पर कई सुज्ञात स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त होते हैं.

* * * * *



अध्याय III

बहुमानी संकुचन हेतु संपात एवं स्थिर बिंदु प्रमेय

इस अध्याय में बहुमानी संकुचन प्रतिचित्रणों हेतु संपात एवं स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व का अध्ययन किया गया है तथा कतिपय संपात एवं स्थिर बिंदु प्रमेय प्रतिपादित किये गये हैं. यह प्रमेय डलबॉस्को [32] द्वारा प्रतिपादित स्थिर बिंदु प्रमेय को बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु विस्तारित एवं व्यापकीकृत करते हैं.
यह अध्याय निम्न भागों में विभक्त है.

1. प्रारम्भिकी
2. संकेतन एवं परिभाषायें
3. परिणाम
4. उदाहरण एवं टिप्पणियां

1
प्रारम्भिकी

विज्ञान, गणितीय विज्ञान, सांख्यिकी, अभियांत्रिकी तथा कई अन्य क्षेत्रों में बहुमानी प्रतिचित्रणों के अध्ययन का विशेष महत्व है. हाउसडॉर्फ दूरीक का प्रयोग करते हुये सर्वप्रथम नाडलर [100] ने बानाख़ संकुचन प्रतिचित्रण की अवधारणा को बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु विस्तारित किया (देखें, परिभाषा 2.1). वस्तुत: नाडलर ने दर्शाया कि एक पूर्ण दूरीक समष्टि X पर बहुमानी संकुचन प्रतिचित्रण T के लिये एक स्थिर बिंदु होता है, अर्थात् पूर्ण समष्टि X में एक ऐसे बिंदु z का अस्तित्व होता है कि $z \in Tz$. यह सिद्धांत नाडलर बहुमानी संकुचन सिद्धांत के नाम से लोकप्रिय है.

तत्पश्चात् , आसाद एवं किर्क [3], किरिक [27], कनेको [81], कनेको एवं सेसा [82], इसेकी [70], स्मिथसन [169], इटोह [71], दूबे एवं सिंह [39], हू [66] एवं अन्य कई गणितज्ञों ने बानाख़ संकुचन के विकास के तर्ज पर बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु विभिन्न परिस्थितियों में विभिन्न समष्टियों पर नाडलर संकुचन सिद्धांत को विस्तारित एवं व्यापकीकृत किया. फलस्वरूप बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु अनेक महत्वपूर्ण स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किये गये (उदाहरणार्थ, देखें [1], [10], [11], [19], [23], [24], [30], [41], [42], [49], [50], [52], [57], [59], [63], [72], [80], [84], [92], [98], [104], [125], [137], [169], [177], व [185]). संकर संकुचन प्रतिचित्रणों का अध्ययन 1980-83 में भारतीय गणितज्ञों प्रो० एस० एल० सिंह, डा० चित्रा कुलश्रेष्ठ, प्रो० पी० बी० सुब्रहमन्यम एवं डा० आर० भास्करन के अतिरिक्त यूरोपीय गणितज्ञ प्रो० ओल्गा हैड़जिक से आरम्भ होता है. बाद में संकर संकुचन प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेयों की उपयोगिता को देखते हुये अनेक गणितज्ञ इस ओर आकर्षित हुये. इसी क्रम में विभिन्न समष्टियों पर संकर संकुचन प्रतिचित्रणों हेतु कई महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त किये गये (देखें, उदाहरणार्थ [7], [26], [42], [44], [82], [95], [96], [102], [135], [156], [160], [163], [164], व [167]).

एकमानी प्रतिचित्रणों हेतु बानाख़ संकुचन प्रतिचित्रण के व्यापक रूप में व्यापकीकरण को ध्यान में रखते हुए डी० डलबॉस्को [32] ने कई संकुचन शर्तों को एकीकृत कर एक व्यापक संकुचन शर्त पारिभाषित करने का एक सफल प्रयास किया जिसको हम डलबॉस्को संकुचन प्रतिचित्रण (p-सकुंचन प्रतिचित्रण) से निरूपित करेंगे.

मान लें R_+ ऋणेत्तर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है. P ऐसे फलनों $p: R_+^3 \to R_+$ का समुच्चय है जो निम्न शर्तें संतुष्ट करता हो.

(i) p समूचे R_+^3 पर संतत है,

(ii) $p(1, 1, 1) = h < 1, \quad h \in R_+$,

(iii) यदि किसी $u, v \in R_+$ के लिये $u \leq p(u, v, v)$ या $u \leq p(v, u, v)$ या $u \leq p(v, v, u)$ तब $u \leq kv$ जहाँ $k \in [h, 1)$.

डलबॉस्को द्वारा पारिभाषित संकुचन शर्त निम्नवत् है.

परिभाषा 1.1. किसी दूरीक समष्टि X पर किसी स्वप्रतिचित्रण T को p-संकुचन कहते हैं यदि सभी $x, y \in X$ के लिये $p \in P$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि

(*) $$d(Tx, Ty) \leq p(d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)).$$

प्रमेय 1.1 [32]. मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है. यदि $T: X \to X$, p-संकुचन प्रतिचित्रण हो तो प्रतिचित्रण T के लिए X में एक और केवल एक स्थिर बिंदु का अस्तित्व होता है, अर्थात् X में एक अद्वितीय बिंदु z का इस प्रकार अस्तित्व होता है कि $z = Tz$.

हाल ही में प्रोफेसर सेसा ने डलबॉस्को के परिणाम को विस्तारित एंव व्यापकीकृत करते हुये कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किये तथा प्रदर्शित किया कि किसी प्रतिचित्रण T के लिये संकुचन शर्त (*) अन्य कई संकुचनीय शर्तों को एकीकृत एवं व्यापकीकृत करता है (देखें, [149]).

प्रोफेसर रोड्स का अनुसरण करते हुए [149] में दिखाया गया है कि संकुचनीय शर्तें (5), (7), (8), व (14) आदि को संकुचन शर्त (*) द्वारा प्राप्त कर सकते हैं. उदाहरणार्थ :

(5) $d(Tx, Ty) \leq h.$अधि$\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}, \quad 0 \leq h < 1,$

(7) $d(Tx, Ty) \leq a\, d(x, y) + b d(x, Tx) + c d(y, Ty),$

जहाँ $a, b, c, \in R_+$ इस प्रकार हैं कि $a + b + c < 1$.

यदि संकुचन शर्त (*) में $p(u, v, z)$ का मान क्रमश: $h.$ अधि$\{v, z\}$ एवं $au + bv + cz$ लें तो हमें उपर्युक्त संकुचन शर्तें प्राप्त होती हैं तथा संकुचन शर्त (20) तथा (*) एक दूसरे में स्वतन्त्र हैं.

(20)
$$d(Tx, Ty) \leq a.d(x, y) + b.\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\} + c\{d(x, Ty) + d(y, Tx)\},$$

$a, b, c \in R_+$ एवं $a + 2b + 2c < 1$.

इस अध्याय में हम डलबॉस्को संकुचन शर्त को बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु पारिभाषित करते हुये कुछ संपात एवं स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त करेंगे.

2

संकेतन एवं परिभाषायें

मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है. नाडलर [100], किरिक [27], सिंह एवं कुलश्रेष्ठ [159], रोड्स, सिंह एवं कुलश्रेष्ठ [135] तथा सिंह, हा एवं चो [158] का अनुसरण करते हुये हम निम्न संकेतों, परिभाषाओं एवं प्रमेयों का प्रयोग करेंगे.

CL(X) = {A : जहाँ A समष्टि X का अरिक्त संवृत उपसमुच्चय है },

CB(X) = {A : जहाँ A समष्टि X का अरिक्त संवृत एवं परिवद्ध उपसमुच्चय है},

C(X) = {A : जहाँ A समष्टि X का अरिक्त संहत उपसमुच्चय है},

d(a, B) = निम्नक {d(a, b) : b ∈ B}.

किसी A, B ∈ CL(X) तथा $\epsilon > 0$ के लिये

$N(\epsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon, a \in A\}$.

$E_{A.B} = \{\epsilon > 0 : A \subseteq N(\epsilon, B)$ एवं $B \subseteq N(\epsilon, A)\}$,

$$H(A, B) = \begin{cases} \text{निम्नक } E_{A.B} & \text{यदि } E_{A,B} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{यदि } E_{A.B} = \emptyset. \end{cases}$$

यह सुज्ञात है कि d द्वारा प्रेरित दूरीक फलन H, CB(X) एवं CL(X) पर क्रमश: हाउसडॉर्फ दूरीक एवं व्यापकीकृत हाउसडॉर्फ दूरीक है, अर्थात् CB(X) एवं CL(X) दूरीक फलन H के साथ दूरीक समष्टियां हैं (देखें, कुरातोवस्की [90]).

परिभाषा **2.1[100]**. बहुमानी फलन $T: X \to CB(X)$ समष्टि X पर बहुमानी संकुचन प्रतिचित्रण होता है यदि प्रत्येक $x, y \in X$ तथा किसी धनात्मक संख्या $q < 1$ के लिए

$$H(Tx, Ty) \le q\, d(x, y).$$

मान लें $f : X \to X$ एवं T समष्टि X से X के अरिक्त उपसमुच्चयों की समष्टि पर बहुमानी प्रतिचित्रण है.

परिभाषा **2.2 [27]**. अनुक्रम $\{x_n : x_n \in Tx_{n-1}\}$ बिंदु x_0 पर T का कक्षक होता है.

परिभाषा **2.3 [27]**. यदि $\{x_{n_i} : x_{n_i} \in Tx_{n_i - 1}\}$ प्रकार का प्रत्येक कौशी अनुक्रम समष्टि X के किसी बिंदु पर अभिसरित हो तो समष्टि X को T- कक्षतः पूर्ण कहते हैं.

परिभाषा **2.4[135]**. यदि X के किसी अवयव x_0 के लिए अनुक्रम $\{x_n\}$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि $fx_{n+1} \in Tx_n$, n=0, 1, 2, . . . तब $O_f(x_0) = \{ fx_n : n=1, 2, 3, \dots \}$ युगल (T, f) के लिए x_0 पर कक्षक होता है तथा $O_f(x_0)$ युगल (T, f) के लिए x_0 पर नियमित कक्षक होता है, यदि प्रत्येक n के लिये

$$d(fx_{n+1}, fx_{n+2}) \le H(Tx_n, Tx_{n+1}).$$

परिभाषा **2.5[135]**. यदि $\{f x_{n_i} : fx_{n_i} \in Tx_{n_i - 1}\}$ प्रकार का प्रत्येक कौशी अनुक्रम समष्टि X में अभिसरित हो तो समष्टि X को (T, f) - कक्षतः पूर्ण समष्टि कहते हैं.

परिभाषा **2.6[159]**. बहुमानी प्रतिचित्रण $T: X \to CL(X)$ समष्टि X के किसी बिंदु x_0 पर उपगामितः नियमित होता है यदि प्रत्येक अनुक्रम $\{x_n : x_n \in Tx_{n-1}\}$ के लिए

$$\text{सीमा}_n\ d(x_n, x_{n+1}) = 0$$

मान लें युगल (S, T) समष्टि X से X के अतिरिक्त उपसमुच्चयों की समष्टि पर बहुमानी प्रतिचित्रण है तथा f समष्टि X का एक स्वप्रतिचित्रण है.

परिभाषा 2.7[158]. यदि समष्टि X के किसी बिंदु x_0 के लिए अनुक्रम $\{x_n\}$ इस प्रकार हो कि $fx_n \in Sx_{n-1}$ जहाँ n विषम संख्या है तथा $fx_n \in Tx_{n-1}$ जहाँ n सम संख्या है, तब $O_f(x_0) = \{fx_n : n = 1, 2, \ldots\}$ त्रिक् (S, T, f) के लिए x_0 पर कक्षक होता है तथा $O_f(x_0)$ त्रिक् $(S, T; f)$ के लिए नियमित कक्षक होता है यदि

$$d(fx_n, fx_{n+1}) \le \begin{cases} H(Sx_{n-1}, Tx_n) & \text{जब कि n विषम संख्या है,} \\ H(Tx_{n-1}, Sx_n) & \text{जब कि n सम संख्या है.} \end{cases}$$

परिभाषा 2.8 [158]. यदि $x_0 \in X$ के लिये प्रत्येक कौशी अनुक्रम $O_f(x_0)$ समष्टि X के किसी बिंदु पर अभिसरित होता हेा तो समष्टि X को (S, T, f, x_0)-कक्षत: पूर्ण या x_0 के सापेक्ष (S, T, f)-कक्षत: पूर्ण समष्टि कहते हैं.

परिभाषा 2.9[158]. युगल (S, T) समष्टि X के किसी बिंदु पर उपगामित: नियमित होता है यदि X के प्रत्येक अनुक्रम $\{y_n : y_n \in Sx_{n-1} \cup Tx_{n-1}\}$ के लिये

$$\text{सीमा}_n \ d(y_n, y_{n+1}) = 0.$$

यह स्पष्ट है कि परिभाषाओं (2.7), (2.8), व (2.9) में $S = T$ लेने पर क्रमश: परिभाषायें (2.4), (2.5), व (2.6) प्राप्त होती हैं.

अब हम डलबॉस्को संकुचन शर्त (*) को बहुमानी प्रतिचित्रण T हेतु पारिभाषित करेगें.

परिभाषा 2.10 . प्रतिचित्रण $T : X \to CL(X)$ को बहुमानी p-संकुचन कहते हैं यदि सभी $x, y \in X$ के लिये $p \in P$ इस प्रकार हो कि

$$(**) \qquad H(Tx, Ty) \le p(d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)).$$

प्रमेयिका 2.1 (नाडलर [100]). मान लें $A, B \in CB(X)$. तब प्रत्येक $\epsilon > 0$ एवं $a \in A$ के लिये $b \in B$ इस प्रकार मान सकते हैं कि $d(a, b) \leq H(A, B) + \epsilon$. यदि $A, B \in C(X)$ तब $b \in B$ इस प्रकार मान सकते हैं कि

$$d(a, b) \leq H(A, B).$$

प्रमेयिका 2.2 (रूस [138]). मान लें $A, B \in CL(X)$ एवं $a \in A$. तब किसी घनात्मक संख्या $\lambda > 1$ के लिये $b \in B$ इस प्रकार लिया जा सकता है कि

$$d(a, b) \leq \lambda H(A, B).$$

3

परिणाम

निम्न प्रमेय किरिक [27] से उद्धृत है.

प्रमेय **3.1.** यदि $T: X \to CL(X)$ व्यापकीकृत बहुमानी प्रतिचित्रण है, अर्थात् प्रत्येक $x, y \in X$ के लिये $0 \le q < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि

$$(3.1) \qquad H(Tx, Ty) \le q.\text{अधि} \{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), [d(x, Ty) + d(y, Tx)]/2 \},$$

तथा समष्टि X, T-कक्षतः पूर्ण हो तो

(a) प्रत्येक $x_0 \in X$ के लिये कक्षक $\{x_n : x_n \in Tx_{n-1}\}$ तथा बिंदु $u \in X$ का इस प्रकार अस्तित्व होता है कि

$$\text{सीमा}_n \; x_n = u,$$

(b) प्रतिचित्रण T के लिये बिंदु u एक स्थिर बिंदु होता है तथा

(c) $d(x_n, u) \le (q^{1-a})^n (1 - q^{1-a}) d(x_0, x_1)$; जहाँ $a < 1$ धनात्मक संख्या है.

प्रमेय **3.2.** मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है. यदि $T : X \to CL(X)$ एक बहुमानी p-संकुचन प्रतिचित्रण हो, समष्टि X T-कक्षतः पूर्ण हो तथा किसी $\lambda > 1$ के लिये $\lambda p \in P$ तो समष्टि X में T के लिये एक स्थिर बिंदु का अस्तित्व होता है, अर्थात् X में एक बिंदु z का इस प्रकार अस्तित्व होता है कि $z \in Tz$.

उपपत्ति. मान लें $x_0 \in X$. हम X में अनुक्रम $\{x_n\}$ की निम्न प्रकार से रचना करते हैं. प्रमेयिका 2.2 की सहायता से हम मान सकते हैं कि $x_1 \in Tx_0$ के लिये $x_2 \in Tx_1$ इस प्रकार

है कि

$$d(x_1,\ x_2) \ \le\ \lambda H(Tx_0,\ Tx_1), \qquad \lambda > 1.$$

व्यापक रूप में $x_n \in Tx_{n-1}$ के लिये $x_{n+1} \in Tx_n$ इस प्रकार लें कि

$$d(x_n,\ x_{n+1}) \le \lambda H(Tx_{n-1},\ Tx_n).$$

अब शर्त (* *) द्वारा

$$d(x_n,\ x_{n+1}) \le \lambda H(Tx_{n-1},\ Tx_n)$$

$$\le \lambda p(d(x_{n-1},\ x_n),\ d(x_{n-1},\ Tx_{n-1}),\ d(x_n,\ Tx_n))$$

$$\le \lambda p(d(x_{n-1},\ x_n), d(x_{n-1},\ x_n),\ d(x_n,\ x_{n+1})).$$

चूंकि $\lambda p \in P$ इसलिये शर्त (iii) द्वारा

(3.2) $\quad d(x_n,\ x_{n+1}) \ \le\ kd(x_{n-1},\ x_n),$ जहाँ $k < 1.$

(3.2) प्रदर्शित करता है कि अनुक्रम $\{x_n\}$ समष्टि X का एक कौशी अनुक्रम है. चूंकि X, T-कक्षतः पूर्ण है इसलिये $\{x_n\}$ समष्टि X के किसी बिंदु z पर अभिसरित होगा.

परिणामतः

$$d(z,\ Tz) \le d(z,\ x_{n+1}) + d(x_{n+1},\ Tz)$$

$$\le d(z,\ x_{n+1}) + H(Tx_n,\ Tz)$$

$$\le d(z,\ x_{n+1}) + p\,(d(x_n,\ z),\ d(x_n,\ Tx_n),\ d(z,\ Tz))$$

$$\le d(z,\ x_{n+1}) + p\,(d(x_n,\ z),\ d(x_n,\ x_{n+1}),\ d(z,\ Tz)).$$

अब n का सीमांत मान लेने पर

$$d(z,\ Tz) \le p(o,\ o,\ d(z,\ Tz)).$$

अतः शर्त (iii) द्वारा $z \in Tz$, अर्थात् समष्टि X में प्रतिचित्रण T के लिये z एक स्थिर बिंदु है.

प्रमेय 3.3. मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है. $T : X \to CL(X)$. यदि $f : X \to X$ इस प्रकार हो कि $T(X) \subset f(X)$, $f(X)$ (T, f)-कक्षतः पूर्ण हो तथा सभी $x, y \in X$ के लिये $p \in P$ इस प्रकार हो कि $\lambda p \in P$ जहाँ $\lambda > 1$ एवं

$$(3.3) \qquad H(Tx, Ty) \le p(d(fx, fy), d(fx, Tx), d(fy, Ty)).$$

तो T तथा f के लिये समष्टि X में एक संपात बिंदु का अस्तित्व होता है, अर्थात् X में एक बिंदु z का इस प्रकार अस्तित्व होता है कि $fz \in Tz$.

उपपत्ति. मान लें $x_0 \in X$. हम X में अनुक्रमों $\{x_n\}$ एवं $\{y_n\}$ की निम्न प्रकार से रचना करते हैं. चूंकि $T(X) \subset f(X)$ इसलिये हम मान सकते हैं कि $y_1 = fx_1 \in Tx_0$. प्रमेयिका 2.2 के अनुसार हम $y_2 = fx_2 \in Tx_1$ इस प्रकार ले सकते हैं कि

$$d(y_1, y_2) \le \lambda H(Tx_0, Tx_1); \qquad \lambda > 1.$$

व्यापक रूप में हम मान सकते हैं कि $y_{n+2} = fx_{n+2} \in Tx_{n+1}$ एवं $y_{n+1} = fx_{n+1} \in Tx_n$ इस प्रकार हैं कि

$$d(y_{n+1}, y_{n+2}) \le \lambda H(Tx_n, Tx_{n+1}).$$

शर्त (3.3) द्वारा

$$\begin{aligned} d(y_{n+1}, y_{n+2}) &\le \lambda H(Tx_n, Tx_{n+1}) \\ &\le \lambda p(d(fx_n, fx_{n+1}), d(fx_n, Tx_n), \\ &\qquad d(fx_{n+1}, Tx_{n+1})) \\ &\le \lambda p(d(y_n, y_{n+1}), d(y_n, y_{n+1}), \\ &\qquad d(y_{n+1}, y_{n+2})). \end{aligned}$$

चूंकि $\lambda p \in P$ इसलिये शर्त (iii) से स्पष्ट है कि

$$d(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq k\, d(y_n, y_{n+1}), \qquad k < 1$$

अत: $\{y_n\}$, अर्थात् $\{fx_n\}$ उपसमष्टि $f(X)$ में एक कौशी अनुक्रम है. चूंकि $f(X)$ (T,f)-कक्षत: पूर्ण है इसलिये अनुक्रम $\{y_n\}$ उपसमष्टि $f(X)$ के किसी बिंदु q पर अभिसरित होगा, अर्थात् X में एक बिंदु z इस प्रकार होगा कि $q = fz$.

अत:

$$\begin{aligned} d(fz, Tz) &\leq d(fz, fx_{n+1}) + d(fx_{n+1}, Tz) \\ &\leq d(fz, fx_{n+1}) + H(Tx_n, Tz) \\ &\leq d(fz, fx_{n+1}) + p(d(fx_n, fz), d(fx_n, Tx_n), \\ &\qquad d(fz, Tz)) \\ &\leq d(fz, fx_{n+1}) + p(d(fx_n, fz), d(fx_n, fx_{n+1}), \\ &\qquad d(fz, Tz)). \end{aligned}$$

अब n का सीमांत मान लेने पर

$$d(fz, Tz) \leq p(o, o, d(fz, Tz))$$

पुन: शर्त (iii) से स्पष्ट है कि $fz \in Tz$, अर्थात् z प्रतिचित्रण f एवं T का संपात बिंदु है.

परिभाषा 2.4 को ध्यान में रखते हुये प्रमेय 3.3 में शर्त $T(X) \subset f(X)$ के स्थान पर कक्षत: नियमितता लेने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है.

प्रमेय 3.4. मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा $T : X \to CL(X)$. यदि समष्टि X का कोई स्वप्रतिचित्रण f इस प्रकार हो कि प्रत्येक $x, y \in X$ शर्त (3.3) को सन्तुष्ट करता हो, X में अनुक्रम $\{x_n\}$ इस प्रकार है कि कक्षक $O_f(x_0)$ युगल (T, f) के लिये कक्षतः नियमित हो तथा $f(X)$, (T, f, x_0)-कक्षकतः पूर्ण हो तो समष्टि X में f तथा T हेतु एक संपात बिंदु का अस्तित्व होता है, अर्थात् X में एक बिंदु z का इस प्रकार अस्तित्व मिलता है कि $fz \in Tz$.

उपपत्ति. प्रमेय 3.3 की उपपत्ति को ध्यान में रखते हुये यदि हम असमिका $d(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq \lambda H(Tx_n, Tx_{n+1})$ के स्थान पर प्रबल असमिका $d(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq H(Tx_n, Tx_{n+1})$ लें तो हमें परिणाम प्राप्त हो जाता है, अर्थात् X में एक बिंदु z का अस्तित्व इस प्रकार मिलता है कि $fz \in Tz$.

अब हम बहुमानी युगल प्रतिचित्रणों (S, T) तथा एक एकमानी प्रतिचित्रण f हेतु संपात बिंदु प्रमेय स्थापित करेंगे.

प्रमेय 3.5. मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है. $S, T : X \to CL(X)$. यदि X का कोई स्वप्रतिचित्रण f इस प्रकार हो कि $S(X) \cup T(X) \subset f(X)$, उपसमष्टि $f(X)$, (S, T, f)-कक्षतः पूर्ण हो तथा सभी $x, y \in X$ के लिये $p \in P$ इस प्रकार हो कि किसी $\lambda > 1$ के लिये $\lambda p \in P$ एवं

$$(3.4) \qquad H(Sx, Ty) \leq p(d(fx, fy), d(fx, Sx), d(fy, Ty))$$

तो समष्टि X में S, T तथा f के लिये एक संपात बिंदु का अस्तित्व होता है, अर्थात् X में एक बिंदु z का इस प्रकार अस्तित्व मिलता है कि $fz \in Sz \cap Tz$.

उपपत्ति. मान लें $x_0 \in X$. हम X में अनुक्रमों $\{x_n\}$ एवं $\{y_n\}$ की निम्न प्रकार से रचना करते हैं. $x_0 \in X$ के लिये $y_1 = fx_1 \in Sx_0$ तथा $y_2 = fx_2 \in Tx_1$ इस प्रकार लें कि

$$d(y_1, y_2) \leq \lambda H(Sx_0, Tx_1), \qquad \text{जहाँ } \lambda > 1.$$

व्यापक रूप में प्रत्येक $n = 0, 1, 2, ---$ के लिये $y_{2n+1} = fx_{2n+1} \in Sx_{2n}$ एवं $y_{2n+2} = fx_{2n+2} \in Tx_{2n+1}$ इस प्रकार लें कि

$$d(y_{2n+1}, \quad y_{2n+2}) \leq \lambda H(Sx_{2n}, \ Tx_{2n+1}).$$

अत: शर्त (3.4) द्वारा

$$\begin{aligned} d(y_{2n+1}, \quad y_{2n+2}) &\leq \lambda H(Sx_{2n}, \ Tx_{2n+1}) \\ &\leq \lambda p(d(fx_{2n}, \ fx_{2n+1}), \ d(fx_{2n}, \ Sx_{2n}), \\ &\qquad d(fx_{2n+1}, \ Tx_{2n+1})) \\ &\leq \lambda p(d(fx_{2n}, \ fx_{2n+1}), d(fx_{2n}, \ fx_{2n+1}) \\ &\qquad d(fx_{2n+1}, \ fx_{2n+2})) \\ &\leq \lambda p(d(y_{2n}, \ y_{2n+1}), \ d(y_{2n}, \ y_{2n+1}), \\ &\qquad d(y_{2n+1}, \ y_{2n+2})). \end{aligned}$$

चूंकि $\lambda \ p \in P$ इसलिये शर्त (iii) से

$$d(y_{2n+1}, \ y_{2n+2}) \leq kd(y_{2n}, \ y_{2n+1}), \qquad k < 1.$$

अत: यह स्पष्ट है कि $\{y_{2n}\}$ अर्थात् $\{fx_{2n}\}$ कौशी अनुक्रम हैं. चूंकि $f(X)$ (S, T, f)-कक्षत: पूर्ण है इसलिये अनुक्रम $\{y_{2n}\}$, $f(X)$ के किसी बिंदु p पर अभिसरित होगा, अर्थात् X में एक बिंदु z इस प्रकार होगा कि $fz = p$.

अत:

$$\begin{aligned} d(fz, \ Sz) &\leq d(fz, \ fx_{2n+2}) + d(fx_{2n+2}, \ Sz) \\ &\leq d(fz, \ fx_{2n+2}) + H(Tx_{2n+1}, \ Sz) \\ &\leq d(fz, \ fx_{2n+2}) + p(d(fx_{2n+1}, \ fz), \\ &\qquad d(fx_{2n+1}, \ Tx_{2n+1}), \ d(fz, \ Sz)) \end{aligned}$$

$$\leq d(fz, fx_{2n+2}) + p(d(fx_{2n+1}, fz), d(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}), d(fz, Sz)).$$

अब n का सीमांत मान लेने पर

$$d(fz, Sz) \leq p(0, 0, d(fz, Sz)).$$

फलतः शर्त (iii) से स्पष्ट है कि $fz \in Sz$.
इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $fz \in Tz$. अतः X में एक बिंदु z का इस प्रकार अस्तित्व होगा कि

$$fz \in Sz \cap Tz.$$

प्रमेय 3.5 में शर्त $S(X) \cup T(X) \subset f(X)$ के स्थान पर कक्षतः नियमितता लेने पर हमें निम्न प्रमेय प्राप्त होती है.

प्रमेय 3.6. मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है. $S, T : X \to CL(X)$. यदि X का कोई स्वप्रतिचित्रण f इस प्रकार है कि

(a) प्रत्येक $x, y \in X$ शर्त (3.4) संतुष्ट करते हैं,
(b) X में कोई अनुक्रम $\{x_n\}$ इस प्रकार है कि कक्षक $O_f(x_0)$ (S, T, f) - कक्षतः नियमित है तथा
(c) f(X) (S T, f, x_0) -कक्षतः पूर्ण है.

तब X में S, T तथा f के लिये एक संपात बिंदु होता है, अर्थात् X में बिंदु z का अस्तित्व इस प्रकार मिलता है कि $fz \in Sz \cap Tz$.

उपपत्ति. प्रमेय 3.5 की उपपत्ति को ध्यान में रखते हुये हम असमिका $d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \leq \lambda H(Sx_{2n}, Tx_{2n+1})$ के स्थान पर प्रबल असमिका $d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \leq H(Sx_{2n}, Tx_{2n+1})$ लें तो हम परिणाम प्राप्त कर सकते हैं, अर्थात् हम सिद्ध कर सकते हैं कि X में बिंदु z का अस्तित्व इस प्रकार है कि $fz \in Sz \cap Tz$.

4

उदाहरण एवं टिप्पणियां

निम्न उदाहरण स्पष्ट करते हैं कि व्यापकीकृत बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु किरिक [27] द्वारा प्राप्त प्रमेय (जो कि प्रमेय 3.1 के रूप में उद्धृत है) तथा प्रमेय 3.2 एक दूसरे में स्वतंत्र परिणाम हैं.

उदाहरण **4.1.** मान लें $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. दूरीक फलन d इस प्रकार पारिभाषित है कि

$d(1, 2) = 28$, $d(1, 3) = 31$, $d(1, 4) = 14$, $d(1, 5) = 12$,

$d(2, 3) = 21$, $d(2, 4) = 23$, $d(2, 5) = 29$, $d(3, 4) = 17$,

$d(3, 5) = 25$, $d(4, 5) = 8$

तथा $T1 = \{2\}$, $T2 = \{3\}$, $T3 = \{4\}$, $T4 = T5 = \{5\}$.
यदि $p(u, v, z) = 19/20 \exp\{(u - v)(u - z)(v - z)\}^2 . \max\{u, v, z\}$ लें तो $p \in P$ के लिये सभी शर्तें सन्तुष्ट होती हैं तथा X के प्रत्येक अवयव x, y के लिये शर्त (**) सन्तुष्ट है. किन्तु शर्त (3.1) सन्तुष्ट नहीं है. अन्यथा $x = 1$ एवं $y = 4$ पर किसी $q < 1$ के लिये

$$H(Tx, Ty) = 29 \leq q.\text{ अधि }\{14, 28, 8, (12+23)/2\} = 28q$$

$$\Rightarrow 29 \leq 28q, \text{ जो कि एक विरोधाभास है.}$$

उदाहरण **4.2.** मान लें $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. दूरीक फलन d इस प्रकार है कि

$d(1, 2) = d(2, 4) = d(4, 5) = d(1, 5) = 1.$
$d(1, 4) = d(2, 5) = \sqrt{2}$

$d(2, 3) = d(3, 4) = 1/2$

$d(1, 5) = d(3, 5) = \sqrt{5}/2$

एवं $T1 = \{2\}, \; T2 = T3 = T4 = \{3\}, \; T5 = \{4\}$.

$q = 1/\sqrt{2}$ लेने पर x के प्रत्येक अवयव x, y के लिये शर्त (3.1) सन्तुष्ट है जब कि शर्त (**) सन्तुष्ट नहीं है. अन्यथा $x = 1$ तथा $y = 5$ के लिये

$H(T1, T5) = 1 \leq p(1, 1, 1)$ जो शर्त (i) का विरोध करता है.

टिप्पणी **4.1.** प्रमेय 3.5 में f को तत्समक प्रतिचित्रण लेने पर हमें बहुमानी प्रतिचित्रण युगल (S, T) के लिये निम्न स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त होती है.

उपप्रमेय **4.1.** मान लें (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है, $S, T : X \to CL(X)$. यदि प्रत्येक $x, y \in X$ के लिये $p \in P$ का अस्तित्व ऐसा है कि किसी $\lambda > 1$ के लिये $\lambda p \in P$ एवं

$$(4.1) \qquad H(Tx, Ty) \leq p(d(x, y), d(x, Sx), d(y, Ty)).$$

तब समष्टि X में S तथा T के लिये एक उपयनिष्ठ स्थिर बिंदु होता है.

टिप्पणी **4.2.** प्रमेय 3.5 में f को तत्समक प्रतिचित्रण तथा S एवं T को एकमानी प्रतिचित्रण युग्म लेने पर निम्न स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त होता है.

उपप्रमेय **4.2.** मान लें (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है. S, T : X → X. यदि प्रत्येक x, y ∈ X के लिये p ∈ P का इस प्रकार अस्तित्व हो कि

(4.2) $$d(Sx, Ty) \leq p(d(x, y), d(x, Sx), d(y, Ty))$$

तो X में S एवं T के लिये एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु होता है.

यह उल्लेखनीय है कि उपप्रमेय 4.2 डलबॉस्को [32] द्वारा स्थापित परिणाम को एकमानी प्रतिचित्रण युग्मों हेतु विस्तारित करता है.

* * * * *

अध्याय IV

संकर अप्रसारीय प्रतिचित्रणों हेतु संपात एवं स्थिर बिंदुओं का अस्तित्व

प्रस्तुत अध्याय में किसी दूरीक समष्टि पर संकर अप्रसारी प्रकार के बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु संपात एवं स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व का अध्ययन किया गया है.

इस अध्याय के निम्न अनुभाग हैं.

1. प्रारम्भिकी
2. परिणाम
3. उदाहरण एवं टिप्पणियां

1

प्रारम्भिकी

अविस्तारी एवं अविस्तारी प्रकार के एकमानी एवं बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय गणितीय विज्ञान एवं अभियांत्रिकी के क्षेत्र में सफल साधनों हेतु मुख्य भूमिका निभाते है. प्रतिचित्रण $T : X \rightarrow X$ अविस्तारी प्रतिचित्रण कहलाता है यदि सभी $x, y \in X$ के लिये

(A) $d(Tx, Ty) \leq d(x, y).$

स्थिर बिंदु सिद्धांत के विगत साहित्य में अविस्तारी प्रतिचित्रणों हेतु कई महत्वपूर्ण प्रमेय प्राप्त किये गये हैं (देखें, उदाहरणार्थ [6], [36], [45], [47], [83], [114], [119], [127], [143], [144], [145], [148], [175], व [181],).

हाल ही में किरिक [28] ने किसी पूर्ण दूरीक समष्टि X पर अविस्तारी प्रकार के स्वप्रतिचित्रण हेतु एक महत्वपूर्ण स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किया (देखें, प्रमेय 1.1). जबकि T प्रत्येक $x, y \in X$ के लिये शर्त

(*) $d(Tx, Ty) \leq$ a. अधि$\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), [d(x, Ty) + d(y, Tx)]/2\}$ + b. अधि $\{d(x, Tx), d(y, Ty)\} + c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$,

जहाँ a, b, c ऋणेत्तर वास्तविक संख्यायें हैं तथा

(* *) $a + b + 2c = 1,$ संतुष्ट करता है.

वास्तव में किरिक द्वारा प्राप्त प्रमेय इस प्रकार है.

प्रमेय 1.1. मान लें (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा $T : X \to X$. यदि प्रत्येक $x, y \in X$ के लिये शर्त (*) तथा (**) संतुष्ट है, जबकि $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. तब समष्टि X में प्रतिचित्रण T के लिये एक अद्‌वितीय स्थिर बिंदु होता है.

किरिक [28] ने दर्शाया कि प्रमेय 1.1 सकुंचित एवं अविस्तारी प्रकार के कई सुज्ञात स्थिर बिंदु प्रमेयों को व्यापकीकृत करता है. इसी क्रम में अविस्तारी प्रकार के प्रतिचित्रणों के लिये बोगिन [12] द्‌वारा प्राप्त स्थिर बिंदु प्रमेय उल्लेखनीय है.

प्रमेय 1.2. मान लें (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा $T : X \to X$. यदि प्रत्येक $x, y \in X$ के लिये

$$(B) \qquad d(Tx, Ty) \leq ad(x, y) + b[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + c[d(x, Ty) + d(y, Tx)],$$

जहाँ $a \geq 0$, $b > 0$, $c > 0$ एवं $a + 2b + 2c = 1$.

तब समष्टि X में प्रतिचित्रण T के लिये एक अद्‌वितीय स्थिर बिंदु होता है.

[28] में उदाहरण देकर स्पष्ट किया गया है कि प्रमेय 1.1, प्रमेय 1.2 को व्यापकीकृत करता है (देखें, उदाहरण 3.1). रोड्स [121] का अनुसरण करते हुये हम निम्न दो मुख्य संकुचनीय शर्तों का अध्ययन करते हैं.

प्रत्येक $x, y \in X$, $0 \leq h < 1$,

$$(21') \qquad d(Tx, Ty) \leq h. \text{अधि} \{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), [d(x, Ty) + d(y, Tx)]/2 \},$$

$$(24) \qquad d(Tx, Ty) \leq h. \text{अधि} \{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx) \}.$$

वास्तव में शर्त (*) एवं (* *) अन्य कई संकुचनीय शर्तों को व्यापकीकृत करता है (देखें, उदाहरण 3.2).

बहुमानी अप्रसारी प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व का अध्ययन आरम्भ करने का श्रेय एन० ए० आसाद एवं डब्ल्यू०ए० किर्क [3] एवं मार्किन [91] को जाता है. कालान्तर में अनेक गणितज्ञों ने बहुमानी अप्रसारी प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व का अध्ययन किया (देखें, [24], [67], [68], [69], [185]).

मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है. फलन H समष्टि X के सवृंत एंव परिबद्ध उपसमुच्चयों की समष्टि के लिये हाउसडॉर्फ दूरीक निरुपित करता है. यदि T समष्टि X से X के अरिक्त उपसमुच्चयों की समष्टि पर बहुमानी प्रतिचित्रण हो तो T बहुमानी अविस्तारी प्रतिचित्रण कहलाता है यदि प्रत्येक $x, y \in X$ के लिये

(C) $$H(Tx, Ty) \leq d(x, y).$$

प्रस्तुत अध्याय में हम अध्याय III में प्रयुक्त संकेतनों परिभाषाओं एंव प्रमेयिकाओं (देखें, अध्याय III, अनुभाग 2) का प्रयोग करते हुये किरिक द्वारा अन्वेषित शर्त (*) एंव (* *) को बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु व्यापकीकृत कर कुछ संपात एंव स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त करेंगे.

2

परिणाम

प्रमेय **2.1.** मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है. T समष्टि X से C(X) में बहुमानी प्रतिचित्रण है. यदि $f: X \to X$ प्रतिचित्रण इस प्रकार है कि

(2.1) $T(X) \subset f(X)$,

(2.2) f(X) (T, f) -कक्षतः पूर्ण है तथा प्रत्येक $x, y \in X$ के लिये

(2.3) $H(Tx, Ty) \leq$ a.अधि { d(fx, fy), d(fx, Tx), d(fy, Ty), [d(fx, Ty) + d(fy, Tx)]/ 2} + b.अधि { d(fx, Tx), d(fy, Ty)} + c[d(fx, Ty) + d(fy, Tx)},

जहाँ $a \geq o$, $b > 0$, $c > o$ एंव

(2.4) $a + b + 2c = 1$;

तब समष्टि X में T तथा f लिये एक संपात बिंदु होता है, अर्थात् X में एक बिंदु z का अस्तित्व इस प्रकार मिलता है कि $fz \in Tz$.

उपपत्ति. समष्टि X में कोई बिंदु x_0 लें. हम X में अनुक्रमों $\{x_n\}$ एंव $\{y_n\}$ की निम्न प्रकार से रचना करते है. चूंकि $T(X) \subset f(X)$ इसलिये हम मान सकते हैं कि $y_1 = fx_1 \in Tx_0$. यदि $Tx_0 = Tx_1$ तब $y_2 = fx_2 \in Tx_1$ इस प्रकार लें कि $y_1 = y_2$. यदि $Tx_0 \neq Tx_1$ तब $y_2 = fx_2 \in Tx_1$ इस प्रकार ले सकते है कि

$d(y_1, y_2) \leq H(Tx_0, Tx_1)$, क्योंकि X के प्रत्येक x के लिये Tx संहत उपसमुच्चय है.

व्यापक रुप में, यदि $Tx_n = Tx_{n+1}$ तब $y_{n+1} = fx_{n+1} \in Tx_n$ के लिये $y_{n+2} = fx_{n+2} \in Tx_{n+1}$ इस प्रकार लें कि y_{n+1} y_{n+2} और यदि $Tx_n \neq Tx_{n+1}$ तब

$$d(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq H(Tx_n, Tx_{n+1}).$$

अत: (2.3) द्वारा

$$\begin{aligned} d(y_{n+1}, y_{n+2}) &\leq H(Tx_n, Tx_{n+1}) \\ &\leq a.\text{अधि}\ \{d(fx_n, fx_{n+1}), d(fx_n, Tx_n), d(fx_{n+1}, Tx_{n+1}), [d(fx_n, Tx_{n+1}) + d(fx_{n+1}, Tx_n)]/2\} + b.\text{अधि}\ \{d(fx_n, Tx_n), d(fx_{n+1}, Tx_{n+1})\} + c\,[d(fx_n, Tx_{n+1}) + d(fx_{n+1}, Tx_n)] \\ &= a.\text{अधि}\ \{d(y_n, y_{n+1}), d(y_n, Tx_n), d(y_{n+1}, Tx_{n+1}), [d(y_n, Tx_{n+1}) + d(y_{n+1}, Tx_n)]/2\} + b.\text{अधि}\ \{d(y_n, Tx_n), d(y_n, Tx_{n+1})\} + c\,[d(y_n, Tx_{n+1}) + d(y_{n+1}, Tx_n)] \\ &\leq a.\text{अधि}\ \{d(y_n, y_{n+1}), d(y_n, y_{n+1}), d(y_{n+1}, y_{n+2}), [d(y_n, y_{n+2}) + d(y_{n+1}, y_{n+1})]/2\} + b.\text{अधि}\ \{d(y_n, y_{n+1}), d(y_{n+1}, y_{n+2})\} + c\,[d(y_n, y_{n+2}) + d(y_{n+1}, y_{n+1})]. \end{aligned}$$

अत: त्रिभुजीय असमिका द्वारा

$$(2.5) \qquad d(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq (a+b).\text{अधि}\ \{d(y_n, y_{n+1}), d(y_{n+1}, y_{n+2})\} + c\,[d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2})].$$

यदि किसी n के लिये, $d(y_{n+1}, y_{n+2}) > d(y_n, y_{n+1})$ हो तो (2.5) द्वारा

$$d(y_{n+1}, y_{n+2}) < (a+b)\, d(y_{n+1}, y_{n+2}) + 2cd(y_{n+1}, y_{n+2})$$

$$= d(y_{n+1}, y_{n+2}),$$ जो कि असम्भव है

इसलिये $d(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq d(y_n, y_{n+1})$

अत: प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक n के लिये,

(2.6) $d(y_n, y_{n+1}) \leq d(y_1, y_2)$.

पुन: (2.4) द्वारा

$$d(y_2, Tx_3) \leq H(Tx_1, Tx_3)$$

$\leq$ a. अधि $\{d(fx_1, fx_3), d(fx_1, Tx_1), d(fx_3, Tx_3), [d(fx_1, Tx_3) + d(fx_3, Tx_1)]/2\}$ +
b. अधि $\{d(fx_1, Tx_1), d(fx_3, Tx_3)\}$ +
$c[d(fx_1, Tx_3) + d(fx_3, Tx_1]$

$\leq$ a. अधि $\{d(y_1, y_3), d(y_1, y_2), d(y_3, y_4), [d(y_1, y_4) + d(y_3, y_2)]/2\}$ +
b. अधि $\{d(y_1, y_2), d(y_3, y_4)\}$ +
$c[d(y_1, y_4) + d(y_3, y_2)]$.

अत:

(2.7) $d(y_2, Tx_3) \leq$ a. अधि $\{d(y_1, y_3), d(y_1, y_2), [d(y_1, y_4) + d(y_1, y_2)]/2\} + bd(y_1, y_2) + c[d(y_1, y_4) + d(y_1, y_2)]$.

पुन: (2.6) एवं त्रिभुजीय असमिका से

$$1/2\,[d(y_1, y_4) + d(y_1, y_2)] \leq 1/2\,[d(y_1, y_2) + d(y_2, y_3) + d(y_3, y_4) + d(y_1, y_2)]$$

$$\leq 2d(y_1, y_2)$$

एवं

$$d(y_1, y_4) + d(y_1, y_2) \leq d(y_1, y_2) + d(y_2, Tx_3) + d(y_1, y_2)$$

$$= 2d(y_1, y_2) + d(y_2, Tx_3).$$

इसलिये (2.7) द्वारा

$$d(y_2, Tx_3) \leq a.\text{ अधि } \{2d(y_1, y_2), d(y_1, y_2), 2d(y_1, y_2)\} + bd(y_1, y_2) + c\,[2d(y_1, y_2) + d(y_2, Tx_3)]$$

$$\leq (2a + b + 2c)\, d(y_1, y_2) + cd(y_2, Tx_3).$$

अत:

$$(2.8) \qquad d(y_2, Tx_3) \leq [(1 + a) / (1 - c)\, d(y_1, y_2)$$

$$\leq (2 - b)\, d(y_1, y_2).$$

पुन: (2.3), (2.5) एवं (2.8) से

$$d(y_3, y_4) \leq H(Tx_2, Tx_3)$$

$$\leq a.\text{ अधि } \{d(fx_2, fx_3), d(fx_2, Tx_2), d(fx_3, Tx_3), [d(fx_2, Tx_3) + d(fx_3, Tx_2)]/2\} + b.\text{अधि}\{d(fx_2, Tx_2), d(fx_3, Tx_3)\} + c[d(fx_2, Tx_3) + d(fx_3, Tx_2)]$$

$\leq$ a. अधि $\{d(y_2, y_3), d(y_3, y_4), [d(y_2, y_4) + d(y_3, y_3)]/2\}$ + b. अधि $\{d(y_2, y_3), d(y_3, y_4)\}$ + $c[d(y_2, Tx_3)]$

$\leq$ a. अधि $\{d(y_1, y_2), 1/2\, d(y_2, y_4)\}$ + $bd(y_1, y_2)$ + $c(2 - b)\ d(y_1, y_2)$

$\leq$ $(a + b)\ d(y_1, y_2) + c(2 - b)\ d(y_1, y_2)$

$=$ $(1 - bc)\ d(y_1, y_2)$.

इसी प्रकार गणना जारी रखते हुये हम प्राप्त कर सकते हैं कि

$$(2.9) \qquad d(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq (1\text{-}bc)^{[n/2]}\, d(y_1, y_2),$$

जहाँ $[n/2]$ ऐसे धन पूर्णांक को प्रदर्शित करता है जो कि $n/2$ से अधिक न हो. चूंकि परिकल्पनानुसार $bc > o$, इसलिये (2.9) से स्पष्ट है कि अनुक्रम $\{y_n\}$, अर्थात् $\{fx_n\}$ उपसमष्टि $f(X)$ में कौशी अनुक्रम होगा. पुन: $f(X)$ (T, f)-कक्षत: पूर्ण है इसलिये अनुक्रम $\{y_n\}$ उपसमष्टि $f(X)$ के किसी बिंदु p पर अभिसरित होगा, अर्थात् X में एक बिंदु z इस प्रकार होगा कि $p = fz$.

अत:

$$d(fz, Tz) \leq d(fz, fx_{n+1}) + d(fx_{n+1}, Tz)$$

$$\leq d(fz, fx_{n+1}) + H(Tx_n, Tz)$$

$\leq$ $d(fz, fz_{n+1})$ + a. अधि$\{d(fx_n, fz), d(fx_n, Tx_n), d(fz, Tz), [d(fx_n, Tz) + d(fz, Tx_n)]/2\}$ + b. अधि$\{d(fx_n, Tx_n), d(fz, Tz)]$ + $c[d(fx_n, Tz) + d(fz, Tx_n)]$

$\leq$ d(fz, fx_{n+1}) + a.अधि{d(fx_n, fz), d(fx_n, fx_{n+1}), d(fz, Tz), [d(fx_n, Tz) + d(fz, fx_{n+1})] / 2} + b. अधि{d(fx_n, fx_{n+1}), d(fz, Tz)} + c[d(fx_n, Tz) + d(fz, fx_{n+1})].

अब n का सीमांत मान लेने पर

d (fz, Tz) $\leq$ d(fz, fz) + a. अधि {d(fz, fz), d(fz, Tz), d(fz, Tz)/2} + b.अधि{d(fz, Tz), d(fz, fz)} + c[d(fz, Tz) + d(fz, fz)]

$=$ (a + b + c) d(fz, Tz).

यह दर्शाता है कि fz $\in$ Tz, अर्थात् बिंदु z प्रतिचित्रणों T तथा f का संपात बिंदु है.

प्रमेय **2.2.** मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है. T समष्टि X से CL(X) पर एक बहुमानी प्रतिचित्रण है. यदि प्रतिचित्रण f: X $\rightarrow$ X इस प्रकार हो कि T(X) $\subset$ f(X) एवं f(X) (T, f)-कक्षत: पूर्ण हो तथा प्रत्येक x, y $\in$ X के लिये T शर्त (3.1) संतुष्ट करता हो, जहाँ a $\geq$ o, b $\geq$ o, c · o तथा

(2.4) $a + b + 2c < 1$

तो T तथा f के लिये समष्टि X में एक संपात बिंदु होता है, अर्थात् X में एक बिंदु z का इस प्रकार अस्तित्व होता है कि fz $\in$ Tz.

उपपत्ति. X में एक बिंदु x_0 लें. हम X में अनुक्रमों $\{x_n\}$ एवं $\{y_n\}$ की निम्न प्रकार से रचना करते हैं. चूंकि T(X) $\subset$ f(X) इसलिये हम मान सकते हैं कि $y_1 = fx_1 \in Tx_0$ तथा $y_2 = fx_2 \in Tx_2$ इस प्रकार हैं कि

$$d(y_1, y_2) \leq \lambda H(Tx_n, Tx_{n+1}).$$

व्यापक रूप में हम मान सकते हैं कि $y_{n+1} = fx_{n+1} \in Tx_1$ एवं $y_{n+2} = fx_{n+2} \in Tx_{n+1}$ इस प्रकार हैं कि

$$d(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq \lambda H(Tx_n, Tx_{n+1}).$$

अत: (2.3) द्वारा

$$d(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq \lambda H(Tx_n, Tx_{n+1})$$

$$\leq \lambda a.\text{अधि}\{d(fx_n, fx_{n+1}), d(fx_n, Tx_n), d(fx_{n+1}, Tx_{n+1}), [d(fx_n, Tx_{n+1}) + d(fx_{n+1}, Tx_n)]/2\} + \lambda b.\text{अधि}\{d(fx_n, Tx_n), d(fx_{n+1}, Tx_{n+1})\} + \lambda c[d(fx_n, Tx_{n+1}), d(fx_{n+1}, Tx_n)]$$

$$\leq \lambda a.\text{ अधि}\{d(y_n, y_{n+1}), d(y_{n+1}, y_{n+2}), d(y_{n+1}, y_{n+2})/2\} + \lambda b.\text{ अधि}\{d(y_n, y_{n+1}), d(y_{n+1}, y_{n+2})\} + \lambda c[d(y_n, y_{n+2})]$$

(i) यदि $d(y_n, y_{n+1}) > d(y_{n+1}, y_{n+2})$ तब

$$d(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq \lambda(a+b)\ d(y_n, y_{n+1}) + \lambda c[d(y_n, y_{n+2})]$$

त्रिभुजीय असमिका द्वारा

$$d(_{n+1}, y_{n+2}) \leq \lambda(a+b)\, d(y_n, y_{n+1}) + \lambda c[d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2})].$$

अत:

(2.10) $$d(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq [\lambda(a+b+c)/(1-\lambda c)]\ d(y_n, y_{n+1}).$$

(ii) यदि $(d(y_{n+1}, y_{n+2}) > d(y_n, y_{n+1})$ तब

$$d(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq \lambda(a+b)\ d(y_{n+1}, y_{n+2}) + \lambda\, cd(y_n, y_{n+2}).$$

पुनश्च त्रिभुजीय असमिका द्वारा

$$d(y_{n+1}, y_{n+2}) \le \lambda(a+b+c)\, d(y_{n+1}, y_{n+2}) + \lambda c d(y_n, y_{n+1}).$$

अत:

(2.11) $d(y_{n+1}, y_{n+2}) \le [\lambda c / (1 - \lambda(a + b + c)]\, d(y_n, y_{n+1}).$

चूंकि $\lambda (a + b + c) < 1$ इसलिये $\lambda (a + b + c) / (1 - \lambda c) < 1$ एवं $\lambda c / (1 - \lambda (a + b + c)) < 1$. अत: (2.10) एवं (2.11) दर्शाता है कि $\{y_n\}$, अर्थात् $\{fx_n\}$ उपसमष्टि $f(X)$ में कौशी अनुक्रम है. पुन: $f(X)$ (T, f)-कक्षत: पूर्ण है. इसलिये $\{y_n\}$ उपसमष्टि $f(X)$ के किसी बिंदु p पर अभिसरित होगा, अर्थात् X में एक बिंदु z इस प्रकार होगा कि $p = fz$.

$$\begin{aligned} d(fz, Tz) &\le d(fz, fx_{n+1}) + d(fx_{n+1}, Tz). \\ &\le d(fz, fx_{n+1}) + H(Tx_n, Tz) \\ &\le d(fz, fx_{n+1}) + \lambda a.\text{अधि}\{d(fx_n, fz), d(fx_n, Tx_n), \\ &\quad d(fz, Tz), [d(fx_n, Tz) + d(fz, Tx_n)]/2\} + \\ &\quad \lambda b.\text{अधि}\{d(fx_n, Tx_n), d(fz, Tz)\} + \lambda c[d(fx_n, \\ &\quad Tz) + d(fz, Tx_n)] \\ &\le d(fz, fx_{n+1}) + \lambda a.\text{अधि}\{d(fx_n, fz), d(fx_n, fx_{n+1}), \\ &\quad d(fz, Tz), [d(fx_n, Tz) + d(fz, fx_{n+1})]/2\} + \\ &\quad \lambda b.\text{अधि}\{d(fx_n, fx_{n+1}), d(fz, Tz)\} + \\ &\quad \lambda c[d(fx_n, Tz) + d(fz, fx_{n+1})]. \end{aligned}$$

n का सीमांत मान लेने पर

$$d(fz, Tz) \le \lambda(a+b+c)\, d(fz, Tz),$$

जो यह दर्शाता है कि $fz \in Tz$. अर्थात् बिंदु z प्रतिचित्रण T एवं f का संपात बिंदु है.

यदि प्रमेय 2.1 तथा 2.2 में f तत्समक प्रतिचित्रण लें तो हम निम्न स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त कर सकते है.

प्रमेय 2.3 मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है. T समष्टि X से C(X) में एक बहुमानी प्रतिचित्रण है. यदि प्रत्येक $x, y \in X$ के लिये

(2.3") $H(Tx, Ty) \le$ a.अधि$\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), [d(x, Ty) + d(y, Tx)] / 2\}$ + b.अधि$\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}$ + $c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$

जहाँ $a \ge 0$, $b > 0$, $c > 0$ एवं $a + b + 2c = 1$. तो समष्टि X में T के लिये एक स्थिर बिंदु होता है, अर्थात् X में एक बिंदु z का अस्तित्व इस प्रकार होता है कि $z \in Tz$.

उपपत्ति. प्रमेय 2.1 की तरह ही उपपत्ति दी जा सकती है.

प्रमेय 2.4. मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है. T समष्टि X से CL(X) में एक बहुमानी प्रतिचित्रण है. यदि प्रत्येक $x, y \in X$ हेतु शर्त (2.3"), जहाँ $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c > 0$ एवं $a + b + 2c < 1$, संतुष्ट हो तो X में प्रतिचित्रण T हेतु एक स्थिर बिंदु होता है, अर्थात् X में एक बिंदु z इस प्रकार अस्तित्व होता है कि $z \in Tz$.

उपपत्ति. प्रमेय 2.2 की तरह उपपत्ति दी जा सकती है

3

उदाहरण एवं टिप्पणियां

उदाहरण 3.1 [28]. मान लें $X = \{1, 3, 4, 6\}$ एवं

$$T1 = 6, \; T6 = 4, \; T4 = T3 = 3.$$

तब $a = 3/5$, $b = 1/5$, $c = 1/10$ लेने पर प्रत्येक $x, y \in X$ के लिये शर्त $(*)$ संतुष्ट है. किन्तु शर्त (A) संतुष्ट नहीं है. उदाहरणार्थ, $x = 1$ एवं $y = 3$ लेने पर किसी भी $a, b, c \geq 0$ के लिये

$$ad(x, y) + b\{d(x, Tx) + d(y, Ty)] + c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

$$= 2a + 5b + 5c \leq (a + 2b + 2c)\, 5/2$$

$$= 5/2 < 3 = d(Tx, Ty).$$

उदाहरण 3.2 [121]. मान लें $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ इस प्रकार है कि $Tx = 0$, $0 \leq x < 1$ एवं $T1 = 1/2$. तब $a = o$, $b = 1/2$ एवं $c = 1/4$ लेने पर X के प्रत्येक अवयव x, y के लिये शर्त $(*)$ संतुष्ट है **जबकि** $x = 1/2$ **एवं** $y = 1$ के लिये शर्त (21') संतुष्ट नहीं है. यदि $0 \leq h < 1/2$ लें तो $x = 1/2$ एवं $y = 1$ के लिये शर्त (24) भी संतुष्ट नहीं है.

टिप्पणी 3.1. प्रमेय 3.1 में f को तत्समक प्रतिचित्रण, T को एकमानी स्वप्रतिचित्रण तथा X को पूर्ण दूरीक समष्टि लेने पर हमें प्रमेय 2.1 (किरिक [28]) प्राप्त होता है.

टिप्पणी **3.2.** प्रमेय 3.2 में b एवं c का मान शून्य लेने पर हमें प्रमेय 1 (सिंह एवं कुलश्रेष्ठ [160]) प्राप्त होता है.

टिप्पणी **3.3.** प्रमेय 3.4 में b एवं c का मान शून्य लेने पर हमें व्यापकीकृत बहुमानी संकुचन हेतु किरिक [27] द्वारा स्थापित प्रमेय 1 प्राप्त होता है.

* * * * *

अध्याय V

कक्षतः संतत बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

मान लें X एक दूरीक समष्टि है तथा $T : X \to CL(X)$ इस प्रकार है कि $H(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, Tx)$, $y \in Tx$, $0 < \lambda < 1$. ऐसे बानाख़ प्रकार के संकुचन बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु के अध्ययन का अन्वेषण इस अध्याय का प्रमुख उद्देश्य है. कतिपय सामान्य शर्तों के साथ यह दिखाया गया है कि X में एक ऐसे बिंदु z का अस्तित्व मिलता है कि $z \in Tz$ यदि T कक्षतः संतत हो (देखें, प्रमेय 2.1). प्रमेय 2.1 में कक्षतः संतत शर्त के स्थान पर अन्य प्रतिबंध लेकर कतिपय स्थिर बिंदु परिणाम प्राप्त किये गये हैं.

इस अध्याय के निम्न अनुभाग हैं :

1. प्रारम्भिकी
2. परिणाम :
   i. बहुमानी प्रतिचित्रण हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय
   ii. दो बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

1

प्रारम्भिकी

सन् 1978 में हिक्स एवं रोड्स (61) ने संकुचन शर्त (1.1) को लेकर बानाख़ प्रकार का एक महत्वपूर्ण स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किया (देखें अध्याय 1, प्रमेय 1.1). हाल ही में प्रोफेसर हिक्स ने शर्त (1.1) के अधीन दूरीक, कल्प-दूरीक एवं d- पूर्ण सांस्थितिक समष्टि पर कुछ महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त किये हैं (देखें, [56], [58], [60], [61]).

इस अध्याय में फलन H समष्टि X के संवृत एवं परिबद्ध उपसमुच्चयों (क्रमशः संवृत उपसमुच्चयों) पर हाउसडॉर्फ दूरीक (क्रमशः व्यापकीकृत हाउसडार्फ दूरीक) निरूपित करता है. d(x, A) समष्टि X के बिंदु x तथा अरिक्त उपसमुच्चय A के बीच सामान्य दूरी प्रदर्शित करता है. इसी क्रम में हम पिछले अध्यायों में प्रयुक्त संकेतनों एवं परिभाषाओं का प्रयोग करेंगे. अध्ययन एवं कलेवर की पूर्णता हेतु सर्वप्रथम कुछ परिभाषायें आवश्यक हैं.

परिभाषा **1.1** मान लें T समष्टि X का एक स्वप्रतिचित्रण है. समष्टि X के बिंदु x के लिये अनुक्रम $O(x, \infty) = \{x, Tx, Tx_2, ---\}$ बिंदु x पर T का कक्षक होता है.

परिभाषा **1.2.** फलन $G : X \to R_+$ समष्टि X के किसी बिंदु x पर T-कक्षतः निम्न अर्धसंतत होता है यदि और केवल यदि समष्टि X के किसी अनुक्रम $\{x_n\}$ तथा बिंदु x के लिये सीमा$_n$ $x_n = n$ का अर्थ हो कि $G(x) \leq$ सीमा$_n$ निम्नक $G(x_n)$.

परिभाषा **1.3.** मान लें T समष्टि X से X के अरिक्त उपसमुच्चयों की समष्टि पर बहुमानी प्रतिचित्रण है और समष्टि में अनुक्रम $\{x_n : x_n \in Tx_{n-1}\}$ समष्टि x के एक बिंदु z पर अभिसरित होता है. तब T कक्षतः संतत प्रतिचित्रण होता है यदि सीमा$_n$ $x_n = z$ का अर्थ है कि $H(Tx_n, Tz) = 0$.

वास्तव में हिक्स एवं रोड्स [61] द्वारा अन्वेषित शर्त निम्नवत् है. समष्टि X के किसी अवयव x के लिये प्रत्येक $y \in O(x, \infty)$, $0 < \alpha < 1$,

$$(1.1) \qquad d(Ty, T^2y) \leq \alpha\, d(y, Ty).$$

यह स्पष्ट है कि बानाख़ संकुचन शर्त में $y = Tx$ लेने पर शर्त (1.1) प्राप्त होती है. इस अध्याय में हम एक एवं दो बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु तथा उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु प्रमेय प्रतिपादित करेंगे. जो कई सुज्ञात परिणामों को विस्तारित एवं व्यापकीकृत करते है.

2
परिणाम

i
बहुमानी प्रतिचित्रण हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

प्रमेय **2.1.** मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है और $T : X \rightarrow CL(X)$. यदि समष्टि X T-कक्षतः पूर्ण हो, प्रतिचित्रण T कक्षतः संतत हो तथा किसी $x \in X$ के लिये एक धनात्मक पूर्णांक $\lambda < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि प्रत्येक $y \in Tx$ के लिये,

$$(2.1) \qquad H(Tx, Ty) \leq \lambda\, d(x, Tx)$$

तो समष्टि X में प्रतिचित्रण T हेतु एक स्थिर बिंदु का अस्तित्व होता है.

उपपत्ति. मान लें $x_0 \in X$. हम समष्टि X में अनुक्रम $\{x_n\}$ की निम्न प्रकार से रचना करते हैं. फलन H की परिभाषा के अनुसार बिंदु $x_1 \in Tx_0$ के लिये $x_2 \in Tx_1$ इस प्रकार लें कि

$$d(x_1, x_2) \leq \lambda^{-a} H(Tx_0, Tx_1), \qquad 0 < a < 1.$$

व्यापक रूप में $x_n \in Tx_{n-1}$ के लिये $x_{n+1} \in Tx_n$ इस प्रकार लें कि

$$(2.2) \qquad d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^{-a} H(Tx_{n-1}, Tx_n).$$

चूंकि $x_n \in Tx_{n-1}$ इसलिये शर्त (2.1) द्वारा

$$H(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \lambda\, H(x_{n-1}, Tx_{n-1}).$$

अत: (2.2) द्वारा

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q\, d(x_{n-1}, Tx_{n-1})$$

$$\leq q\, d(x_{n-1}, x_n), \qquad \text{जहाँ } q = \lambda^{1-a}.$$

चूंकि $q < 1$ इसलिये यह स्पष्ट है कि $\{x_n\}$ समष्टि X का एक कौशी अनुक्रम है. क्योंकि X T-कक्षत: पूर्ण समष्टि है इसलिये अनुक्रम $\{x_n\}$ समष्टि X के किसी बिंदु z पर अभिसरित होगा. पुन: प्रतिचित्रण T कक्षत: संतत है अत:

$$\text{सीमा}_n \quad H(Tx_n, Tz) = 0.$$

त्रिभुजीय असमिका द्वारा

$$d(z, Tz) \leq d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tz)$$

$$\leq d(z, x_{n+1}) + H(Tx_n, Tz)$$

अब n का सीमांत मान लेने पर

$$d(z, Tz) = 0, \quad \text{अर्थात्} \quad z \in Tz.$$

अत: बिंदु z समष्टि X में प्रतिचित्रण T के लिये एक स्थिर बिंदु है.

प्रमेय 2.2. मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा $T : X \to CL(X)$. यदि समष्टि X T-कक्षत: पूर्ण हो तथा X के किसी अवयव x के लिये शर्त (2.1) सन्तुष्ट हो तो

(i). समष्टि X मे अनुक्रम $\{x_n\}$ एवं एक बिंदु z का अस्तित्व इस प्रकार मिलता है कि सीमा$_n$ $x_n = z$ तथा

(ii). प्रतिचित्रण T के लिये z एक स्थिर बिंदु होता है यदि और केवल यदि फलन $G(x) = d(x, Tx)$ बिंदु z पर T-कक्षत: निम्न अर्धसंतत हो.

उपपत्ति. (i). मान लें $x_0 \in X$. प्रमेय 2.1 की उपपत्ति से यह स्पष्ट है कि X में अनुक्रम $\{x_n\}$ कौशी अनुक्रम है तथा समष्टि X के किसी बिंदु z पर अभिसरित होता है.

(ii). यदि प्रतिचित्रण T के लिये बिंदु z एक स्थिर बिंदु है, अर्थात् $d(z, Tz) = 0$.

तब $G(z) = d(z, Tz) = 0 \leq$ सीमा$_n$ निम्नक $d(x_n, Tx_n)$

$\leq$ सीमा$_n$ निम्नक $G(x_n)$, अर्थात्

$G(z) \leq$ सीमा$_n$ निम्नक $G(x_n)$.

विलोमतः यदि फलन $G(x) = d(x, Tx)$ T-कक्षतः निम्न अर्धसंतत है, अर्थात् $G(z) \leq$ सीमा$_n$ निम्नक $G(x_n)$.
तब

$G(z) = d(z, Tz) \leq$ सीमा$_n$ निम्नक $G(x_n)$

$=$ सीमा$_n$ निम्नक $d(x_n, Tx_n)$

$\leq$ सीमा$_n$ निम्नक $d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

अतः $d(z, Tz) = 0$, अर्थात् प्रतिचित्रण T के लिये बिंदु z एक स्थिर बिंदु है.

[58], [60], [61], [62] आदि में प्रदर्शित किया गया है कि संकुचन शर्त (1.1) द्वारा अनेक सुज्ञात संकुचन शर्तें प्राप्त की जा सकती हैं. इसी क्रम में हम बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु कुछ जटिल संकुचन शर्तों के अधीन सुज्ञात स्थिर बिंदु प्रमेयों को उपप्रमेयों के रूप में प्राप्त करते हैं.

उपप्रमेय **2.3.** मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा $T : X \rightarrow CL(X)$. यदि समष्टि X T-कक्षतः पूर्ण हो तथा प्रत्येक $x, y \in X$ के लिये $0 \leq b < 1$, $c > 0$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि

(2.3) $[H(Tx, Ty)]^2 \leq b\, d(x, Tx)\, d(y, Ty) + c d(x, Ty)\, d(y, Tx)$

तो समष्टि X में प्रतिचित्रण T हेतु एक स्थिर बिंदु का अस्तित्व होता है.

उपपत्ति. संकुचन शर्त (2.3) में $y \in Tx$ लेने पर

$$[H(Tx, Ty)]^2 \leq b\, d(x, Tx)\, d(y, Ty) + c\, d(x, Ty)\, d(y, Tx)$$

$$\leq b\, d(x, Tx)\, H(Tx, Ty) + c d(Tx, Ty)\, H(Tx, Tx),$$

अर्थात् प्रत्येक $x \in X$ एवं $y \in Tx$ के लिये

$$H(Tx, Ty) \leq bd(x, Tx).$$

अत: हम प्रमेय 2.2 द्वारा परिणाम प्राप्त कर सकते हैं.

उपप्रमेय **2.4.** मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है और $T: X \to CL(X)$. यदि समष्टि X T-कक्षत: पूर्ण हो तथा समष्टि X के प्रत्येक अवयव x, y के लिये धनात्मक पूर्णांक $c < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि

(2.4) $H(Tx, Ty) \leq c(\{d(x, Tx)\}^2 + \{d(y, Ty)\}^2)/ (d(x, Tx) + d(y, Ty))$;

जहाँ $d(x, Tx) + d(y, Ty) \neq 0$ तथा यदि $d(x, Tx) + d(y, Ty) = 0$ है तब $H(Tx, Ty) = 0$, तो समष्टि X में प्रतिचित्रण T हेतु एक स्थिर बिंदु का अस्तित्व होता है.

उपपत्ति. संकुचन शर्त (2.4) में $y \in Tx$ लेने पर

$$H(Tx, Ty) \leq c(\{d(x, Tx)\}^2 + \{H(Tx, Ty)\}^2) / (d(x, Tx) + H(Tx, Ty))$$

अर्थात्

$$H(Tx, Ty)\, d(x, Tx) + \{H(Tx, Ty)\}^2 \le c\{d(x, Tx)\}^2 + \{H(Tx, Ty)\}^2 .$$

परिणामत:

$$H(Tx, Ty) \le c\, d(x, Tx).$$

पुन: प्रमेय 2.2 द्वारा हम परिणाम प्राप्त कर सकते हैं.

ii
दो बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

बहुमानी प्रतिचित्रण युग्मों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित करने के लिये हम निम्न परिभाषा का प्रयोग करेंगे.

परिभाषा **3.1[158].** बहुमानी प्रतिचित्रण युगल (S, T) हेतु X के किसी बिंदु x पर अनुक्रम $\{x_n\}$ बिंदु x पर S एवं T के सापेक्ष कक्षक होता है, जहाँ प्रत्येक $n = 1, 2, 3, \ldots$ के लिये $x_0 = x$, $x_n \in Sx_{n-1}$ एवं $x_{n+1} \in Tx_n$.

प्रमेय **3.1.** मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है और $S, T : X \to CL(X)$. यदि X के किसी अवयव x के लिये धन पूर्णांक $\lambda < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि प्रत्येक $y \in Sx$ के लिये

(3.1) $\quad H(Sx, Ty) \le \lambda\, d(x, Sx)$

तथा समष्टि X (S, T)-कक्षत: पूर्ण हो तो

(i) समष्टि X में अनुक्रम $\{x_n\}$ एवं बिंदु z का इस प्रकार अस्तित्व होता है कि सीमा$_n$ $x_n = z$ तथा

(ii) प्रतिचित्रण S एवं T के लिये बिंदु z एक स्थिर बिंदु होता है यदि और केवल यदि $G_1(x) = d(x, Sx)$ एवं $G_2(x) = d(x, Tx)$ बिंदु z पर S- एवं T-कक्षत: निम्न अर्धसंतत हो.

उपपत्ति. (i). मान लें $x_0 \in X$. हम X में अनुक्रम $\{x_n\}$ की निम्न प्रकार से रचना करते हैं. फलन H की परिभाषा को ध्यान में रखते हुये $x_1 \in Sx_0$ एवं $x_2 \in Tx_1$ इस प्रकार लें कि

$$d(x_1, x_2) \leq \lambda^{-a} H(Sx_0, Tx_1), \qquad \text{जहाँ } 0 < a < 1.$$

व्यापक रूप में सभी $n = 1, 2, 3, \ldots$ के लिये $x_n \in Sx_{n-1}$ एवं $x_{n+1} \in Tx_n$ इस प्रकार लें कि

$$(3.2) \quad d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^{-a} H(Sx_{n-1}, Tx_n).$$

चूंकि $x_n \in Sx_{n-1}$ इसलिये शर्त (3.1) द्वारा

$$H(Sx_{n-1}, Tx_n) \leq \lambda d(x_{n-1}, Sx_{n-1}).$$

अत: (3.2) द्वारा

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \lambda^{-a} H(Sx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq qd(x_{n-1}, Sx_{n-1}) \\ &\leq qd(x_{n-1}, x_n), \qquad \text{जहाँ } q = \lambda^{1-a}. \end{aligned}$$

पुन: $q < 1$. अत: यह स्पष्ट है कि समष्टि X में $\{x_n\}$ एक कौशी अनुक्रम हैं. क्योंकि X (S, T)-कक्षत: पूर्ण समष्टि है इसलिये समष्टि X में बिंदु z का इस प्रकार अस्तित्व होगा कि सीमा$_n$ $x_n = z$.

(ii). यदि प्रतिचित्रण S एवं T के लिये बिंदु z एक स्थिर बिंदु है तब

$d(z, Sz) = 0 \leq$ सीमा$_n$ निम्नक $d(x_n, Sx_n)$ तथा

$d(z, Tz) = 0 \leq$ सीमा$_n$ निम्नक $d(x_n, Tx_n)$, अर्थात्

$G_1(x) = d(x, Sx)$ एवं $G_2(x) = d(x, Tx)$ क्रमश: S- तथा T-कक्षत: निम्न अर्धसंतत हैं.

विलोमत: यदि फलन $G_1(x) = d(x, Sx)$ एवं $G_2(x) = d(x, Tx)$ क्रमश: S- तथा T-कक्षत: निम्न अर्धसंतत हैं. तब

$$d(z, Sz) = G_1(z) \leq \text{सीमा}_n \text{ निम्नक } G(x_n)$$

$$= \text{सीमा}_n \text{ निम्नक } d(x_n, Sx_n) = 0,$$

अर्थात् प्रतिचित्रण S के लिये बिंदु z एक स्थिर बिंदु है. इसी प्रकार हम प्राप्त कर सकते हैं कि प्रतिचित्रण T हेतु बिंदु z एक स्थिर बिंदु है.

परिणामत: $z \in Sz \cap Tz$, अर्थात् प्रतिचित्रण S एवं T के लिये बिंदु z एक उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है.

उपप्रमेय **3.2.** मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा $S, T : X \rightarrow CL(X)$. यदि समष्टि X (S, T)-कक्षत: पूर्ण हो तथा X के प्रत्येक अवयव x, y के लिये $0 < b < 1$, $c > 0$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि

$$\text{(A)} \quad \{H(Sx, Ty)\}^2 \leq b\, d(x, Sx)\, d(y, Ty) + c d(x, Ty)\, d(y, Tx)$$

तो समष्टि X में प्रतिचित्रण S एवं T के लिये एक उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु का अस्तित्व होता है.

उपपत्ति. शर्त (A) में $y \in Sx$ लेने पर

$$H(Sx, Ty) \leq bd(x, Sx).$$

अत: प्रमेय 3.2 से हम परिणाम प्राप्त कर सकते हैं.

उपप्रमेय **3.3.** मान लें (X, d) कोई दूरीक समष्टि है तथा $S, T : X \rightarrow CL(X)$. यदि समष्टि X (S, T)- कक्षत: पूर्ण हो तथा X के प्रत्येक अवयव x, y के लिये $0 < c < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि

(B) $H(Sx, Ty) \leq c(\{d(x, Sx)\}^2 + \{d(y, Ty)\}^2) / (d(x, Sx) + d(y, Ty))$,

जहाँ $d(x, Sx) + d(y, Ty) \neq 0$ एवं यदि $d(x, Sx) + d(y, Ty) = 0$ तब $H(Sx, Ty) = 0$, तो समष्टि X में प्रतिचित्रण S एवं T के लिये एक उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु होता है.

उपपत्ति. पुनः शर्त (B) में $y \in Sx$ लेने पर

$$H(Sx, Ty) \leq cd(x, Sx).$$

अतः प्रमेय 2.2 द्वारा हम परिणाम प्राप्त कर सकते हैं.

* * * * *

अध्याय VI

अस्फुट दूरीक समष्टि में स्थिर बिंदु प्रमेय

इस अध्याय में अस्फुट दूरीक समष्टि पर बानाख़ प्रकार के कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय प्रतिपादित किये गये हैं जो ग्रेबियक [48] के परिणाम को व्यापकीकृत करते हैं तथा हिक्स एवं रोड्स [61], हिक्स [56], [58] आदि के परिणामों को अस्फुट दूरीक समष्टि हेतु विस्तारित करते हैं.
इस अध्याय के अनुभाग हैं:

1. प्रारम्भिकी
2. संकेतन एवं परिभाषायें
3. परिणाम

1

प्रारम्भिकी

प्रोफेसर जादेह [187] द्वारा अन्वेषित अस्फुट समुच्चयों की अवधारणा का गणित एवं गणितीय विज्ञान में बड़े पैमाने पर उपयोग किया जा रहा है. अस्फुट समुच्चय सिद्धांत गणित, जैविक विज्ञान, भौतिक शास्त्र, अभिकलित्रीय विज्ञान एवं अन्य कई क्षेत्रों में विशेष महत्व रखता है. सर्वप्रथम गणितज्ञों द्वारा अस्फुट समुच्चयों का सांस्थितिकी के क्षेत्र में अध्ययन किया गया तथा गणित के अनेक सुज्ञात संकल्पनाओं एवं अवधारणाओं को अस्फुट समुच्चयों हेतु पारिभाषित एवं विस्तारित किया गया. इसी क्रम में दूरीक समष्टि को अस्फुट समुच्चयों हेतु कई रूपों में पारिभाषित किया गया, जिससे अस्फुट दूरीक समष्टि की अनेक परिभाषायें सामने आयी. मुख्यतया हम इन्हें दो भागों में विभाजित कर सकते हैं . प्रथम, जबकि अस्फुट अवयवों के बीच सामान्य (हाउसडॉर्फ) दूरी का प्रयोग किया गया है तथा द्वितीय, जिसमें अस्फुट अवयवों के बीच अस्फुट दूरी का प्रयोग किया गया है (विस्तृत जानकारी हेतु देखें, [8], [13], [15], [20], [48], [55], [79], [87], [151], [165], [170], [182], व [183].)

अस्फुट दूरीक समष्टि में स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व का अध्ययन विशेष महत्व रखता है. हेलपर्न [55] ने अस्फुट प्रतिचित्रणों की अवधारणा प्रस्तुत करते हुये बहुमानी प्रतिचित्रणों हेतु एक स्थिर बिंदु प्रमेय का सफल व्यापकीकरण स्थापित किया. सिंह एवं तलवार [165] ने हेलपर्न [55] के तर्ज पर दो प्रतिचित्रणों हेतु एक स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किया तथा किरिक [27] द्वारा स्थापित व्यापकीकृत बहुमानी संकुचन हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय को अस्फुट दूरीक समष्टि पर विस्तारित किया (देखें, [165], उपप्रमेय 3.5).

दूसरी ओर ग्रेबियक [48] तथा शर्मा [151] ने क्रमोसिल एंव माइकलेक [87] द्वारा पारिभाषित अस्फुट दूरीक समष्टि का अनुसरण करते हुए बानाख़ संकुचन सिद्धांत को अस्फुट दूरीक समष्टि पर विस्तारित एवं व्यापकीकृत किया तथा अनेक महत्वपूर्ण परिणाम स्थापित किये हैं. हाल ही में मिश्रा, शर्मा एवं सिंह [94] ने ग्रेबियक [48] द्वारा प्रस्तुत अस्फुट संकुचन की अवधारणा का अनुसरण करते हुये उपगामित: क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु एक महत्वपूर्ण परिणाम स्थापित किया है जो ग्रेबियक [48] तथा दूरीक समष्टि पर संकुचन प्रतिचित्रणों हेतु कई सुज्ञात स्थिर बिंदु प्रमेयों का सफल व्यापकीकरण है. हम इस अध्याय में अस्फुट दूरीक समष्टि पर कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त करेंगे जो कई सुज्ञात परिणामों को व्यापकीकृत करते हैं तथा हिक्स एवं रोड्स [61] तथा हिक्स [56] व [58] के परिणामों को अस्फुट दूरीक समष्टि हेतु विस्तारित करते हैं.

2

संकेतन एवं परिभाषायें

ग्रेबियक [48], शर्मा [151] तथा मिश्रा, शर्मा एवं सिंह [94] का अनुसरण करते हुये हम निम्न परिभाषाओं, संकेतनों एवं प्रमेयिकाओं का प्रयोग करेंगे.

परिभाषा 2.1 [48]. यदि $([0,1], *)$ इकाई 1 के साथ आवेली मोनोइड इस प्रकार हो कि $a * b \leq c * d$, जबकि $a \leq c$, $b \leq d$ एवं $a, b, c, d \in [0, 1]$ तो फलन $* : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ संतत t-मानक होता है.

परिभाषा 2.2 [48]. मान लें X एक मनमाना समुच्चय है, $*$ संतत t-मानक है तथा M एक अस्फुट समुच्चय $X^2 \times [0, \infty]$ है जो निम्न शर्तें संतुष्ट करता है:

(i) $M(x, y, 0) = 0$,

(ii) $M(x, y, t) = 1$, $t > 0$ यदि और केवल यदि $x = y$,

(iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,

(iv) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t+s)$,

(v) सभी $x, y \in X$, $t, s > 0$ के लिये $M : (x, y, -) : [0, \infty] \to [0, 1]$ वाम संतत है, तब त्रिक् $(X, M, *)$ अस्फुट दूरीक समष्टि प्रदर्शित करता है.

परिभाषा **2.3 [151].** समष्टि X का अनुक्रम $\{x_n\}$ समष्टि X के बिंदु x पर अभिसरित होता है यदि प्रत्येक $t > 0$ के लिये सीमा$_n$ $M(x_n, x, t) = 1$.

परिभाषा **2.4 [151].** अस्फुट दूरीक समष्टि $(X, M, *)$ पूर्ण अस्फुट दूरीक समष्टि होता है यदि प्रत्येक कौशी अनुक्रम समष्टि X के किसी बिंदु पर अभिसरित होता हो.

प्रमेयिका **2.1 [94].** मान लें $\{y_n\}$ अस्फुट दूरीक समष्टि X में एक अनुक्रम है यदि धनात्मक स्थिरांक $k < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि प्रत्येक $n = 1, 2, \ldots$ के लिये

$$M(y_{n+2}, y_{n+1}, kt) \geq M(y_{n+1}, y_n, t), \quad t > 0,$$

तो अनुक्रम $\{y_n\}$ समष्टि X का एक कौशी अनुक्रम होता है.

प्रमेयिका **2.2 [94].** यदि $x, y \in X$ एवं $k < 1$ के लिए

$$M(x, y, kt) \geq M(x, y, t) \quad \text{तब} \quad x = y.$$

3

परिणाम

प्रमेय 3.1. मान लें $(X, M, *)$ एक पूर्ण अस्फुट दूरीक समष्टि इस प्रकार है कि $t * t \geq t, \quad t \in [0, 1]$. $T: X \to X$. यदि T संतत प्रतिचित्रण हो तथा प्रत्येक $x \in X$ के लिये $0 < k < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि

$$(3.1) \qquad M(Tx, T^2x, kt) \geq M(x, Tx, t)$$

तो समष्टि X में प्रतिचित्रण T हेतु एक स्थिर बिंदु का अस्तित्व मिलता है.

उपपत्ति. मान लें $x_0 \in X$. हम समष्टि X में अनुक्रम $\{x_n\}$ की रचना इस प्रकार करते हैं कि $x_n = Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = \text{---} = T^nx_0$.

शर्त (3.1) द्वारा

$$(3.2) \qquad M(Tx_n, T^2x_{n-1}, t) \geq M(x_{n-1}, Tx_{n-1}, t/k)$$

अत:

$$\begin{aligned} M(x_n, x_{n+1}, t) &= M(Tx_{n-1}, T^2x_{n-1}, t) \\ &\geq M(x_{n-1}, Tx_{n-1}, t/k) \\ &\quad \text{- - - - - - - -} \\ &\quad \text{- - - - - - - -} \\ &\quad \text{- - - - - - - -} \\ &\geq M(x_0, x_1, t/k^n). \end{aligned}$$

अत: प्रमेयिका 2.1 द्वारा स्पष्ट है कि $\{x_n\}$ समष्टि X का एक कौशी अनुक्रम है. चूंकि समष्टि X पूर्ण है इसलिए X में बिंदु z का इस प्रकार अस्तित्व होगा कि सीमा$_n$ $x_n = z$.

त्रिभुजीय असमिका द्वारा

$$M(z, Tz, t) \geq M(z, x_{n+1}, t/2) * M(x_{n+1}, Tz, t/2)$$

$$= M(z, x_{n+1}, t/2) * M(Tx_n, Tz, t/2).$$

अत: n का सीमांत मान लेने पर

$$M(z, Tz, t) \geq 1 * 1 = 1, \quad \text{अर्थात्} \quad z = Tz.$$

प्रमेय 3.1 में प्रतिचित्रण T पर संतत होने के प्रतिबंध को शिथिल करते हुये हम किसी फलन $G: X \to R_+$ को T-कक्षत: निम्न अर्धसंतत (देखें, अध्याय II, परिभाषा 1.2) ले सकते हैं. इस शिथिल शर्त के अधीन हमें परिणाम निम्न रूप में प्राप्त होता है

प्रमेय 3.2. मान लें $(X, M, *)$ एक पूर्ण अस्फुट दूरीक समष्टि इस प्रकार है कि $t * t \geq t$, $t \in [0, 1]$. $T: X \to X$. यदि $x \in X$ के लिये $0 < k < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व है कि शर्त (3.1) संतुष्ट हो तो

(i). समष्टि X में अनुक्रम $\{x_n\}$ तथा बिंदु z का इस प्रकार अस्तित्व मिलता है कि सीमा$_n$ x_n = z तथा

(ii). प्रतिचित्रण T के लिये बिंदु z एक स्थिर बिंदु होता है यदि और केवल यदि $G(x) = M(x, Tx, t)$ T-कक्षत: निम्न अर्धसंतत हो.

उपपत्ति. (i). प्रमेय 3.1 की उपपत्ति से स्पष्ट है कि समष्टि X में अनुक्रम $\{x_n\}$ एवं बिंदु z का इस प्रकार अस्तित्व मिलता है कि सीमा$_n$ $x_n = z$.

(ii). मान लें प्रतिचित्रण T के लिये बिंदु z एक स्थिर बिंदु है तब

$M(z, Tz, t) = 1$

$\geq$ सीमा$_n$ निम्नक $M(x_n, Tx_n, t)$

$=$ $G(x_n)$, अर्थात् $G(x) = M(x, Tx, t)$ बिंदु z पर T- कक्षत: निम्न अर्धसंतत है.

विलोमत: यदि $G(x) = M(x, Tx, t)$ बिंदु z पर T-कक्षत: निम्न अर्धसंतत हो तो

$G(z) = M(z, Tz, t)$

$\geq$ सीमा$_n$ निम्नक $M(x_n, Tx_n, t) \geq 1$,

अर्थात् प्रतिचित्रण T के लिये बिंदु z एक स्थिर बिंदु है.

यह उल्लेखनीय है कि प्रमेय 3.1 द्वारा हम अस्फुट दूरीक समष्टि पर कई सुज्ञात स्थिर बिंदु प्रमेयों को उपप्रमेयों के रूप में प्राप्त कर सकते हैं.

उपप्रमेय 3.3 [48]. मान लें $(X, M, *)$ एक पूर्ण अस्फुट दूरीक समष्टि इस प्रकार है कि $t * t \geq t$, $t \in [0, 1]$ तथा $T: X \to X$. यदि प्रत्येक x, y के लिये $0 < k < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि

$$(3.3) \qquad M(Tx, Ty, kt) \geq M(x, y, t)$$

तो समष्टि X में प्रतिचित्रण T हेतु एक अद्वितीय स्थिर बिंदु का अस्तित्व मिलता है.

उपपत्ति. शर्त (3.3) में $y = Tx$ लेने पर हमें शर्त (3.1) प्राप्त होती है. अतः प्रमेय 3.1 द्वारा हम परिणाम प्राप्त कर सकते हैं.

टिप्पणी **3.1** उपर्युक्त उपप्रमेय 3.3 बानाख़ संकुचन सिद्धांत का अस्फुट दूरीक समष्टि के लिये एक सफल रूपांतरण है. कई गणितज्ञों ने इस सिद्धांत को अस्फुट दूरीक समष्टि की विभिन्न अवधारणाओं को लेकर कई अन्य रूपों में भी प्राप्त किया है (देखें, [8] , [13], [15], [55], [151], [165], [170]).

* * * * *

निर्देश

1. J. Achari, Generalized multivalued contractions and fixed points, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 24 (1979), 179-182.

2. I. Argyros and F. Szidarorszky, Convergence of general iteration schemes, J. Math. Anal. Appl. 168(1992), 42-62.

3. N. A. Assad and W. A. Kirk, Fixed point theorems for setvalued mappings of contractive type, Pacific J. Math. 43(1972), 553 - 562.

4. N. A. Assad and S. Sessa, Involution maps and fixed points in Banach spaces, Math. J. Toyoma Univ. 14(1991), 141-146.

5. J. P. Aubin and I. Ekeland, Applied nonlinear analysis, John Willey & Sons (1984).

6. J. B. Baillon, Nonlinear ergodic theory in Banach spaces, Math. Math. Engg. 6 (1981), 87-96.

7. J. B. Baillon and S. L. Singh, Nonlinear hybrid contractions on product spaces, Far Eeast J. Math. Sci. 1(2) (1993), 117-127.

8. T. Bandyopadhyay, S. K. Samanta and P. Das, Fuzzy metric spaces redefined and a fixed point theorem, Bull. Cal. Math. Soc. 81(1989), 247-252.

9. I. Beg and A. Azam, Existence of fixed points of nonlinear mappings, J. Natur. Sci. Math. 29(2)(1989), 149-158.

10. I. Beg and A. Azam, Fixed points of multivalued locally contractive mappings, Boll. U. M. I. 4(7)(1990), 227-233.

11. T. D. Benavides, G. L. Acedo and H. K. Xu, Random fixed points of setvalued operators, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

12. J. Bogin, A generalization of fixed point theorem of Goebel, Kirk and Shimi, Canad. Math. Bull. 19(1976), 7-12.

13. R. K. Bose and D. Sahani, Fuzzy mappings and fixed point theorems, Fuzzy Sets and Systems 21(1987), 53-58.

14. D. S. Bridges, F. Richman, W. H. Julian and R. Mines, Extensions and fixed points of contractive maps in R^n, J. Math. Anal. Appl. 165(2) (1992), 438-456.

15. D. Butnariu, Fixed points for fuzzy mappings, Fuzzy Sets and Systems 7(1982), 192-207.

16. A. Carbone, Applications of fixed point theorems, Jn̄ānābha, 22(1992), 85-97.

17. A. Carbone and B. E. Rhoades, A fixed point theorem for generalized contraction maps, Indian J. Pure Appl. Math. 20(6)(1989), 543-548.

18. A. Carbone and S. P. Singh, Fixed point theorems for Altman type mappings, Indian J. pure Appl. Math. 18(12)(1987), 1082-1087.

19. R. S. Chandel and A. Ganguly, Common fixed point theorems for two systems of transformations, Bull. Cal. Math. Soc. 32(1990), 193-198.

20. C. Chang, Fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl. 24(1968), 182-190.

21. S. Chang, On common fixed point theorems for a family of ϕ-contraction mappings, Math. Japon. 29(4)(1984), 527-536.

22. S. Chang and Q. Zhang, On Rhoades open questions, Proc. Amer. Math. Soc. 109(1)(1990), 269-274.

12. J. Bogin, A generalization of fixed point theorem of Goebel, Kirk and Shimi, Canad. Math. Bull. 19(1976), 7-12.

13. R. K. Bose and D. Sahani, Fuzzy mappings and fixed point theorems, Fuzzy Sets and Systems, 21(1987), 53-58.

14. D. S. Bridges, F. Richman, W. H. Julian and R. Mines, Extensions and fixed points of contractive maps in R^n, J. Math. Anal. Appl. 165(2) (1992), 438-456.

15. D. Butnariu, Fixed points for fuzzy mappings, Fuzzy Sets and Systems 7(1982), 191-207.

16. A. Carbone, Applications of fixed point theorems, Jnanabha, 22(1992), 85-97.

17. A. Carbone and B. E. Rhoades, A fixed point theorem for generalized contraction maps, Indian J. Pure Appl. Math. 20(6)(1989), 543-548.

18. A. Carbone and S. P. Singh, Fixed point theorems for Altman type mappings, Indian J. pure Appl. Math. 18(12)(1987), 1082-1087.

19. R. S. Chandel and A. Ganguly, Common fixed point theorems for two systems of transformations, Bull. Cal. Math. Soc. 32(1990), 193-198.

20. C. Chang, Fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl. 24(1968), 182-190.

21. S. Chang, On common fixed point theorems for a family of ϕ-contraction mappings, Math. Japon. 29(4)(1984), 527-536.

22. S. Chang and Q. Zhang, On Rhoades open questions, Proc. Amer. Math. Soc. 109(1)(1990), 269-274.

23. M. P. Chen and M. Shih, Fixed point theorems for point to point and point to set maps, J. Math Anal. Appl. 71(1979), 515-524.

24. Y. Chen and K. L. Singh, Fixed points for nonexpansive multivalued mappings and the Opial's condition, Jnanabha 22(1992), 107-110

25. C. E. Chidume, Approximation of fixed points of quasi-contractive mappings in Lp spaces, Indian J. Pure Appl. Math. 22(4)(1991), 273-286.

26. Y. J. Cho and S. L. Singh, A coincidence theorem and fixed point theorems in Saks spaces, Kobe J. Math. 3(1)(1986), 1-6.

27. Lj. B. Ćirić, Fixed points for generalized multi-valued contractions, Mat. Vesnik 9(24)(1992), 265-272.

28. Lj. B. Ćirić, A generalization of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc. 45(1974), 267-273.

29. Lj. B. Ćirić, On some nonexpansive type mappings and fixed points, Indian J. Pure Appl. Math. 24(3)(1993), 145-149.

30. S. Czerwik, A fixed point theorem for a system of multivalued transformations, Proc. Amer. Math. Soc. 55(1976), 136-139.

31. K. M. Das and K. V. Naik, Common fixed point theorems for commuting maps on a metric space, Proc. Amer. Math. Soc. 77(3)(1979), 369-373.

32. D. Delbosco, A unified approach of all contractive mappings, Jñānābha 16(1986), 1-11.

33. W. R. Derrick and L. Nova G., Fixed point theorems for discontinuous operators, Glas. Math. 24(44)(1969), 339-348.

34. W. R. Derrick and L. Nova G., Interior properties and fixed points of certain discontinuous operators, Progress in Funct. Anal. (1992), 239-245.

35. B. C. Dhage, On approximating common fixed points of some mappings, J. Math. Phys. Sci. 22(6)(1988), 775-788.

36. X. P. Ding, Iteration processes for nonlinear mappings in convex metric spaces, J. Math. Anal. Appl. 132(1)(1998), 114-122.

37. M. L. Diviccaro, S. Sessa and B. Fisher, Common fixed point theorems with a rational inequality, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. 14(3)(1986), 227-285.

38. W. G. Dotson, Jr., On the Mann itrerative process, Trans. Amer. Math. Soc. 149(1970), 65-73.

39. L. S. Dubey and S. P. Singh, On multivalued contraction mappings, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie. (N. S.) 14(1970), 307-310.

40. B. Fisher and S. Sessa, On a fixed point theorem of Greguŝ, Internat. J. Math. Math. Sci. 9(1)(1986), 23-28.

41. G. Fournier and D. Violette, A fixed point theorem for a class of multivalued continuously differentiable maps, Anal. Polonici Math. 67(1987), 381-402.

42. उमेश चन्द्र गैरोला, दूरीक एवं बानाख़ समष्टियों में संपात, स्थिर एवं संकर बिंदुओं का अस्तित्व, पी-एच. डी. शोध-प्रबंध, गुरूकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय, हरिद्वार (1990).

43. A. Ganguly, On common fixed points of two mappings, Math. Sem. Notes 8(1980), 343-345.

44. K. Goebel, A coincidence theorem, Bull. Acad. Polon. Sci. Sèr. Sci. Math. Astronom. Phys. 16(1968), 733-735.

45. J. Górnicki, Nonlinear ergodic theorems for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces satisfying Opial's condition, J. Math. Anal. Appl. 161(2)(1991), 440-446.

46. J. Górnicki, Fixed points of asymptotically regular mappings in spaces with uniformly normal structures, Comment. Math. Univ. Carolin. 32(4)(1991), 639-643.

47. J. Górnicki and M. Krüppel, Fixed point theorems for mapping with Lipschitzian iterates, Nonlinear Anal. Appl. 19(4)(1992), 353 - 363.

48. M. Grabiec, Fixed points in Fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets & Systems 27(1988), 385- 389.

49. C. L. Guo, Fixed point theorems for singlevalued mappings and multivalued mappings on complete metric spaces, Chinese J. Math. 19(1)(1991), 31-53.

50. C. L. Guo, Fixed point theorems for singlevalued mappings and multivalued mappings on complete metric spaces II, Chinese J. Math. 19(2)(1991), 105-107.

51. C. L. Guo, An extension of fixed point theorem of Krasnoselki, Chinese J. Math. 21(1)(1993), 13-20.

52. O. Hadžić, Fixed point theorems for multivalued mapping in some classes of Fuzzy metric spaces, Fuzzy sets & Systems 29(1989), 115- 125.

53. A. M. Harder and T. L. Hicks, Fixed point theory and iteration procedures, Indian J. Pure Appl. Math. 10(1)(1988), 17-26.

54. A. M. Harder, T. L. Hicks and L. M. Saliga, Fixed point theorems for non-self maps III, Indian J. Pure Appl. Math. 24(3)(1993), 151-154.

55. S. Heilpern, Fuzzy mapping and fixed point theorems, J. Math. Anal. Appl. 83(1981), 566-569.

56. T. L. Hicks, Fixed point theorems for quasi-metric spaces, Math. Japon. 33(2)(1988), 231-236.

57. T. L. Hicks, Fixed point theorems for multivalued mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 20(11)(1989), 1077-1079.

58 T. L. Hicks, Another view of fixed point theory, Math. Japon. 35(27)(1990), 231-234.

59. T. L. Hicks, Set-valued mappings on metric spaces, Indian J. Pure Appl. Math. 22(4)(1991), 269-271.

60. T. L. Hicks, Fixed point theorems for d-complete topological spaces I, Internat. J. Math. Sci. 15(3)(1992), 435- 440.

61. T. L. Hicks and B. E. Rhoades, A Banach type fixed point theorem, Math. Japon. 24(3)(1979), 237-330.

62. T. L. Hicks and B. E. Rhoades, Fixed point theorems for d-complete topological spaces II, Math. Japon. 37(5)(1992), 848-853.

63. T. L. Hicks and B. E. Rhoades, Fixed points and continuity for multi-valued mappings, Internat. J. Math. Sci. 15(1)(1992), 15-30.

64. T. L. Hicks and L. M. Saliga, Fixed point theorems for non-self maps I, Internat. J. Math. Math. Sci. (to appear).

65. T. L. Hicks and L. M. Saliga, Fixed point theorems for non-self maps II, Math. Japon. 38(5)(1993), 953-956.

66. C. Hu, Fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl. 110(1985), 141-148.

67. T. Hussain and A. Latif, Fixed points of multivalued nonexpansive maps, Math. Japon. 33(3)(1988), 385-397.

68. T. Hussain and A. Latif, Fixed points of multivalued nonexpansive maps, Internat. J. Math. Math. Sci. 14(1991), 421-430.

69. T. Hussain and E. Tarafdar, Fixed point theorems for multivalued mappings of nonexpansive type, Yokoh. Math. J. 28(1990), 1-6.

70. K. Iséki, Multivalued contraction mappings in complete metric spaces, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 53(1975), 15-19.

71. S. Itoh, Multivalued generalized contractions and fixed point theorems, Comment. Math. Univ. Carolin. 18(1977), 247-258.

72. S. Itoh and W. Takahashi, Singlevalued mappings, multivalued mappings and fixed point theorems, J. Math. Anal. Appl. 59(1977), 514-521.

73. J. Jiahe, Some applications of a coincidence theorem, Acta Math. Sinica 9(2)(1993), 139-147.

74. G. Jiang, Fixed points for a commuting family of continuous maps, Pure Appl. Math. Sci. 39(1-2)(1994), 11-13.

75. G. Jungck, Commuting mappings and fixed points, Amer. Math. Month. 83(1976), 261-263.

76. G. Jungck, An if fixed point criterion, Math. Maz. 49(1)(1976), 32-34.

77. G. Jungck, Periodic and fixed points and commuting mappings, Proc Amer. Math. Soc. 76(2)(1979), 333-338.

78. G. Jungck, Local radical contractions - a counterexample, Houston J. Math. 8(14)(1992), 501-506.

79. O. Kaleva, The completion of fuzzy metric spaces, J. Math. Anal. Appl. 109(1985), 194-198.

80. H. Kaneko, General principle of fixed points of contractive multivalued mappings, Math. Japon. 31(3)(1986), 407-411.

81. H. Kaneko, Generalized contractive multivalued mappings and their fixed points, Math. Japon. 33(1)(1988), 57-64.

82. H. Kaneko and S. Sessa, Fixed point theorems for compatible multivalued and single-valued mappings, Internat. J. Math. Math. Sci. 12(2)(1989), 257-262.

83. M. A. Khamsi and S. Reich, Nonexpansive mappings and semigroups in hyperconvex spaces, Math. Japon, 35(3)(1990), 467-471.

84. M. S. Khan, Common fixed point theorems for multivalued mappings, Pacific J. Math. 95(2)(1981), 337-347.

85. J. Kincses and V. Totik, Theorems and counterexamples on contractive mappings, Math. Balk. 5(1990), 69-70.

86. W. A. Kirk, A fixed point theorem for mappings which do not increase distance, Amer. Math. Month. 72(1965), 1004-1006.

87. I. Kramosil and J. Michálek, Fuzzy metric and statistical metric spaces, Kybernetik. 11(1975), 336-344.

88. E. Kreyszig, Introductory functional analysis with applications, John Willey & Sons (1976).

89. विजयेन्द्र कुमार, दूरीक एवं २-दूरीक समष्टियों में संपाती एवं स्थिर बिंदु प्रमेय, पी-एच. डी. शोध-प्रबंध हे. न. ब. गढ़वाल विश्वविद्यालय, श्रीनगर (1990).

90. K. Kuratowski, Topology, Vol. 1, Academic Press (1966).

91. J. T. Markin, A fixed point theorem for set-valued mappings, Bull. Amer. Math. Soc. 74(1968), 639-640.

92. S. Massa, D. Roux and S. P. Singh, Fixed point theorems for multi-functions, Indian J. Pure Appl. Math. 18(6)(1987), 512-514.

93. S. N. Mishra, Fixed points of contractive type multivalued mappings, Indian J. pure Appl. Math. 18(4)(1987), 283-287.

94. S. N. Mishra, Nilima Sharma and S. L. Singh, Common fixed points of maps on fuzzy metric spaces, Internat. J. Math. Sci. (1994).

95. S. N. Mishra and S. L. Singh, Coincidence theorems in linear topological spaces, J. Natur. Phys. Sci. 4(1-2)(1990), 163-178.

96. S. N. Mishra and S. L. Singh, Some results on coincidences and fixed points, Rostock. Math. Kolog. 40(1990), 58-70.

97. S. N. Mishra and S. L. Singh, On some fixed point theorems of Argyros, Math. Japon. 37(2)(1992), 329-332.

98. R. N. Mukherjee, On fixed points of singlevalued and multivalued mappings, J. Indian Acad. Math. 4(1982), 101-103.

99. J. R. Munkeres, Topology; A first course, Prentice Hall of India Ltd. (1984).

100. S. B. Nadler, Jr., Multivalued contraction mappings, Pacific J. Math. 30(1969), 639-640.

101. S. V. R. Naidu, Coincidence theorems for set-valued mappings on a topological space, Indian J. Pure Appl. Math. 22(10)(1991), 833-837.

102. S. A. Naimpally, S. L. Singh and J. H. M. Whitfield, Coincidence theorems for hybrid contraction, Math. Nechr. 127(1986), 177-180.

103. T. D. Narang and S. Khanna, On best and best simultaneous approximation, Indian J. Pure Appl. Math. 13(6)(1992), 643-646.

104. D. V. Pai and P. Veeramani, On some fixed point theorems in Banach spaces, Internat. J. Math. Math. Sci. 5(1)(1982), 113-122.

105. S. Park and B. E. Rhoades, Some fixed point theorems for expansion mappings, Math. Japon. 33(1)(1988), 129-132.

106. H. K. Pathak, Some fixed point theorems in Banach spaces for commuting mappings, Indian, J. Pure Appl. Math. 17(8)(1986), 963-973.

107. H. K. Pathak, Some results on unique common fixed points, Ganita 37(1)(1986), 45-52.

108. H. K. Pathak, Fixed point theorems in Banach spaces for three mutually commuting mappings, J. Indian Acad. Math. 8(1)(1986), 44-46.

109. H. K. Pathak, Some fixed point theorems on contractive mappings, Bull. Cal. Math. Soc. 80(1988), 183-188.

110. H. K. Pathak, A Meir-Keeler type fixed point theorem for weakly uniformly contraction maps, Bull. Malaysian Math. Soc. 13(1990), 21-29.

111. H. K. Pathak, and R. P. Dubey, Extension of a fixed point theorem of Naimpally and Singh, Indian J. Pure Appl. Math. 21(10)(1990), 889-891.

112. H. K. Pathak, and A. R. Maity, A fixed point theorem in Banach space, Acta Cinica Ind. 17(1991), 137-142.

113. H. K. Pathak and Rekha Sharma, Extension of fixed point theorem of Diviccaro, Sessa and Fisher, Bull. Pure Appl. Sci. 11(1992), 9-15.

114. A. Pazy, On the asymptotic behavior of iterates of nonexpansive mappings in Hilbert spaces, Israel J. Math. 26(2) (1977), 197-204.

115. D. Prasad, Fixed point theorems with a new functional inequality, Proc. Nat. Acad. Sci. India 54(1984), 445-451.

116. D. Prasad, Fixed point theorems of three mappings with a new functional inequality, Indian J. Pure Appl. Math. 16(10)(1985), 1073-1077.

117. B. K. Ray and B. E. Rhoades, A class of fixed point theorems, Math. Sem. Notes 7(1979), 477-489.

118. S. Reich, Fixed points of contractive functions, Bull. Un. Mat. Ital. 5(1972), 26-42.

119. B. E. Rhoades, Fixed point iterations using infinite matrices, Trans. Amer. Math. Soc. 196(1974), 161-175.

120. B. E. Rhoades, Comments on two fixed point iteration methods, J. Math. Anal. Appl. 56(3)(1976), 741-750.

121. B. E. Rhoades, A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 226(1977), 257-290.

122. B. E. Rhoades, Some fixed point theorems in Banach spaces, Math. Sem. Notes, 5(1977), 69-74.

123. B. E. Rhoades, A fixed point theorem for non-self mapping, Math. Japon. 23(4)(1978), 457-459.

124. B. E. Rhoades, Generalized contractions, Bull. Cal. Math. Soc. 71(1979), 232-330.

125. B. E. Rhoades, Fixed point theorems for set- valued mappings, Math. Sem. Notes 10(1982), 479-484.

126. B. E. Rhoades, Fixed point theorems for some non-self mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 19(7)(1988), 627-633.

127. B. E. Rhoades, Fixed point iterations of generalized nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl. 130(2)(1988), 564-576.

128. B. E. Rhoades, Contractive definitions and continuity, Cont. Math. AMS 72(1988), 233-245.

129. B. E. Rhoades, Contractive definitions, Nonlinear Anal. (1988), 513-526.

130. B. E. Rhoades, Fixed point theorems and stability results for fixed point iteration procedures, Indian J. Pure Appl. Math. 21(1)(1990), 1-9.

131. B. E. Rhoades, Fixed point theorems for families of maps, Indian J. Pure Appl. Math. 21(1)(1990), 10-20.

132. B. E. Rhoades, Some fixed point iteration procedures, Internat. J. Math. Math. Sci. 14(1)(1991), 1-16.

133. B. E. Rhoades, Fixed point theorems and stability results for fixed point iteration procedures II, Indian J. Pure Appl. Math. 24(11)(1993), 691- 703.

134. B. E. Rhoades and S. Park, On generalizations of the Meir-Keeler type contraction maps, J. Math. Anal. Appl. 146(1990), 482-494.

135. B. E. Rhoades, S. L. Singh and C. Kulshrestha, Coincidence theorems for some multivalued mappings, Internat. J. Math. Math. Sci. 7(3) (1984), 429-434.

136. B. E. Rhoades and W. Watson, Generalized contractions and fixed points in metric spaces, Math. Japon. 34(6)(1989), 975-982.

137. B. E. Rhoades and W. Watson, Fixed points for setvalued mappings on metric spaces, Math. Japon. 35(4)(1990), 735-743.

138. I. A. Rus, Fixed point theorems for multivalued mappings in complete metric spaces, Math. Japon. 20(1975), 21-24.

139. K. P. R. Sastry and S. V. R. Naidu, Fixed point theorems for generalized contraction mappings, Yokoh. Math. J. 28(1-2)(1980), 15-29.

140. K. P. R. Sastry and S. V. R. Naidu, Fixed point theorems for generalized contraction mappings, Yokoh. Math. J. 23(1980), 15-29.

141. K. P. R. Sastry and S. V. R. Naidu, On contraction maps, Indian J. Pure Appl. Math. 13(1982), 1417-1419.

142. V. M. Sehgal and S. P. Singh, A theorem on best approximations, Numer. Funct. Anal. Optim. 10(1-2)(1989), 181-184.

143. J. Schu, Iterative approximation of fixed points of nonexpansive mappings with starshaped domain, Comment. Math. Univ. Corolin. 31(2)(1990), 277-282.

144. J. Schu, Approximating fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 112(1)(1991), 143-151.

145. J. Schu, Iterative constructions of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl. 158(2)(1991), 407-413.

146. J. Schu, Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, Bull. Austral. Math. Soc. 43(1991), 153-159.

147. J. Schu, Fixed points of mappings satisfying semi-contractivity conditions, J. Austral. Math. Soc. 53(1992), 25-38.

148. H. F. Senter and W. G. Dotson, Jr., Approximating fixed points of nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 44 (1974), 375-380.

149. S. Sessa, New contractive type mappings in metric spaces, Math. Japon. 33(5)(1988), 801-808.

150. S. Sessa and B. Fisher, On fixed points of weakly commuting mappings in compact metric spaces, Jñānābha 15(1985), 79-81.

151. N. Sharma, A study in fuzzy mappings and fixed point theory, P-h. D. Thesis, G. K. U. Hardwar (1992).

152. A. P. Shostak, Two decades of fuzzy topology; basic ideas, notations and results, Russian Math. Surv. 44(6)(1989), 123-186.

153. S. P. Singh, Lecture notes on fixed point theorems in metric and Banach spaces, St. John's NewFoundland (1974).

154. S. L. Singh, On common fixed points of commuting mappings, Math. Sem. Notes 5(1977), 131-134.

155. S. L. Singh, Approxiating fixed points of multivalued maps, J. Natur. Phys. Sci. 2(1988), 51-61.

156. S. L. Singh and U. C. Gairola, A coincidence theorem for three systems of transformations, Demo. Math. 2(1990), 323-328.

157. S. L. Singh, U. C. Gairola and R. Mehendiratta, A coincidence theorem for three systems of transformations, J. Indian Math. Soc. 56(1991), 65-70.

158. S. L. Singh, K. S. Ha and Y. J. Cho, Coincidence and fixed points of nonlinear hybrid contractions, Internat. J. Math. Math. Sci. 12(2) (1989), 247-256.

159. S. L. Singh and C. Kulshrestha, Coincidence theorems in metric spaces, Indian J. Phys. Natur. Sci. 2(1982), 19-22.

160. S. L. Singh and C. Kulshrestha, Coincidence theorems, Indian J. Phys. Natur. Sci. 3(1983), 6-10.

161. S. L. Singh and R. Mall, Ishikawa iteration process for a pair of nonlinear maps, J. U. P. Govt. College Acad. Soc. 2(1985-86), 136-138.

162. S. L. Singh and S. N. Mishra, Common fixed points and convergence theorems in uniform spaces, Math. Vesnik. 5(18)(1981), 403-410.

163. S. L. Singh and B. D. Pant, Coincidence theorems, Math. Japon. 31(1986), 783-789.

164. S. L. Singh and K. P. R. Rao, Coincidence and fixed points for four mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 3(31)(1989), 215-223.

165. S. L. Singh and R. Talwar, Fixed points of fuzzy mappings, Soch. J. Math. 19(1)(1993), 95-102.

166. S. L. Singh, R. Talwar and Z. Wenzhi, Common fixed point theorems in 2-menger spaces and applications, Math. Stud. 63(1-4)(1994), 74-80.

167. S. L. Singh and J. H. M. Whitfield, Contractors and fixed points, Math. Collog. (to appear).

168. D. R. Smart, Fixed point theorems, Combridge Univ. Press (1974).

169. R. E. Smithson, Common fixed points for contractive multifunctions, Proc. Amer. Math. Soc. 27(1971), 192-194.

170. T. Som and R. N. Mukherjee, Some fixed point theorems for fuzzy mappings, Fuzzy Sets and Systems 33(1989), 213-219.

171. R. Talwar, Fixed point theorems in probabilistic analysis and uniform spaces, P-h. D. Thesis, G. K. U. Hardwar (1991).

172. T. Taniguchi, On common fixed point theorems, Kurum. Univ. J. 37(2)(1988), 53-57.

173. T. Taniguchi, Common fixed point theorems on expansion type mappings on complete metric, Math. Japon. 34(1)(1989), 139-142.

174. P. Veeramani and D. V. Pai, On a fixed point theorem on uniformly convex Banach spaces, Indian J. Pure Appl. Math. 13(6)(1992), 647-650.

175. P. Vijayaraju, Fixed point theorems for asymptotically nonexpansive mappings, Bull. Cal. Math. Soc. 80(1988), 133-136.

176. P. Vijayaraju, Applications of fixed point theorems to best simultaneous approximation, Indian J. Pure Appl. Math. 24(1)(1993), 21-26.

177. D. Violette and G. Fournier, Fixed point principles for cones of a Banach space for the multivalued maps differentiable at the origin and infinity, Canad. J. Math. 44(4)(1992), 888-896.

178. X. Weng, Fixed point iteration for local strictly pseudo-contractive mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 113(1991), 727-731.

179. R. Wittmann, Mean ergodic theorems for nonlinear operators, Proc. Amer. Math. Soc. 108(3)(1990), 781-788.

180. R. Wittmann, Hopfs ergodic theorem for nonlinear operators, Math. Ann. 289(1991), 239-253.

181. R. Wittmann, Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, Arch. Math. 58(1992), 486-491.

182. C. K. Wong, Fuzzy topology : Products and Quotient theorems, J. Math. Anal. Appl. 45(1974), 312-321.

183. C. K. Wong, Fuzzy points and local properties of fuzzy topology, J. Math. Anal. Appl. 46(1974), 316-328.

184. H. K. Xu, Fixed point theorems for uniformly Lipschitzian semigroups in uniformly convex spaces, J. Math. Anal. Appl. 152(1990), 391-398.

185. H. K. Xu, A random fixed point theorem for multivalued nonexpansive operators in uniformly convex Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 117(4)(1993), 1089-1092.

186. T. Yoshimoto, A mean ergodic theorem in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 99(1)(1987), 115-118.

187. L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8(1965), 338-353.

* * * * *

तकनीकी शब्द	TECHNICAL TERMS
अद्वितीय	Unique
अधिकतम	Maximum
अधीन	Under
अध्याय	Chapter
अस्फुट	Fuzzy
अस्फुट समुच्चय	Fuzzy set
अस्फुट विश्लेषण	Fuzzy analysis
अन्वेषण	Investigation
अनुक्रम	Sequence
अनुसरण करना	Follow
अभिकलित्रीय विज्ञान	Computer Science
अभिसरण	Convergence
अभिसरित	Converge
अरिक्त समुच्चय	Nonempty set
अवमुख	Convex
अवयव	Element
अविस्तारी	Nonexpansive
अविस्तारीय/अविस्तारी प्रकार के	Nonexpansive type
अस्तित्व	Existence
असमिका	Inequality
आवेली मोनोइड	Abelian monoid
इष्टतम संचालन	Optimum control
इस प्रकार	Such that
उन्नत	Improve
उपगामी	Asymptotically
उपप्रमेय	Corollary
उपपत्ति	Proof
उपसमष्टि	Subspace
ऋणेत्तर	Nonnegative
एकीकृत	Unify

क्योंकि / चूंकि	Since
कक्षक	Orbit
कक्षतः / कक्षकतः	Orbitally
कक्षतः पूर्ण / कक्षकतः पूर्ण	Orbitally complete
कक्षतः / कक्षकतः संतत	Orbitally continuous
कक्षतः नियमित	Orbitally regular
कल्प-दूरीक समष्टि	Quasi-metric space
क्रीड़ा सिद्धांत	Game theory
कौशी अनुक्रम	Cauchy sequence
क्रमविनिमयी	Commuting
गणितीय विज्ञान	Mathematical science
टिप्पणी	Remark
तत्समक प्रतिचित्रण	Identity mapping
त्रिक्	Triplet
दुर्बल क्रमविनिमयी	Weak commuting
दूरीक	Metric
दूरीक समष्टि	Metric space
२-दूरीक समष्टि	2-metric space
देखें, उदाहरणार्थ	See, for instance
द्विआधारी संक्रिया	Binary operation
निर्देश	Reference
निम्न अर्धसंतत / T-कक्षकतः निम्न अर्धसंतत	Lower semi continuous/ T-orbitally lower semicontinuous
निम्नक	Infimum
नैज अनिश्चितता	Intrinsic indefiniteness
परिणाम	Result
परिमाणतः	Consequently
परिबद्ध	Bounded
परिभाषा	Definition
पारिभाषित	Defined
पूर्ण दूरीक समष्टि	Complete metric space

d-पूर्ण सांस्थितिक समष्टि	d-complete topological space
प्रतिचित्रण	Map / Mapping
प्रमेय	Theorem
प्रायिकतात्मक	Probabilistic
प्रारम्भिकी	Preliminaries
फलन	Fuction
फलनक विश्लेषण	Fuctional analysis
बहुमानी	Multi-valued
बानाख़ समष्टि	Banach space
मनमाना	Arbitrary
मानकित समष्टि	Normed space
यदि और केवल यदि	If and only if
रचना करना	Construct
वस्तुत:	Essentially
विरोध/विरोधाभाष	Contradiction
विस्तारण/विस्तारित	Extension / Extend
सदस्यता फलन	Membership function
सदस्यता संतुलन	Grade of membership
सन्निकटन सिद्धांत	Approximation theory
समपरिवेश समष्टि	Uniform space
समदूरीक प्रतिचित्रण	Isometric mapping
समुच्चय	Set
सीमांत मान	Limiting value
सीमा होगी	Has a limit
सीमा	Limit / lim
संकर	Hybrid
संकुचन सिद्धांत	Contraction principle
संकुचन प्रतिचित्रण	Contraction mapping
सुसंगत प्रतिचित्रण	Compatible maps
संकेतन	Notations

संपात	Coincidence
संवृत	Closed
संहत	Compact
सांस्थितिकी	Topology
सांस्थितिक समष्टि	Topological space
स्थापित करना	Establish
स्थानांतरण प्रतिचित्रण	Translation map
स्थिर बिंदु	Fixed point
स्थिर बिंदु सिद्धांत	Fixed point theory
स्थिर बिंदु प्रमेय	Fixed point theorem
हाउसडॉर्फ दूरीक	Housdorff metric

* * * * *

SUMMARY

of the thesis

FIXED POINT THEOREMS IN NONLINEAR AND FUZZY ANALYSIS

submitted to the

Gurukula Kangri Vishwavidyalaya, Hardwar

for the award of the degree

of

DOCTOR OF PHILOSOPHY

in

MATHEMATICS

by

MAHESH CHANDRA

under the supervision of

Dr. S. L. SINGH
Professor of Mathematics
Dean, Faculty of Science
Gurukula Kangri Vishwavidyalaya
Hardwar 249 404

Enrolment No. 91004 July 1994

The thesis entitled "**Fixed point theorems in nonlinear and fuzzy analysis**" is divided into following six chapters:

CHAPTER I

INTRODUCTION

1. PRELIMINARIES
2. BANACH CONTRACTION PRINCIPLE
3. JUNGCK CONTRACTION PRINCIPLE
4. HYBRID AND MULTIVALUED MAPS
5. FUZZY SETS
6. OUTLINE OF FOURTHCOMING CHAPTERS

CHAPTER II

FIXED POINT THEOREMS FOR PAIRS OF MAPS

1. PRELIMINARIES
2. RESULTS
3. EXAMPLES AND REMARKS

CHAPTER III

COINCIDENCES AND FIXED POINT THEOREMS FOR MULTIVALUED CONTRACTIONS

1. PRELIMINARIES
2. NOTATIONS AND DEFINITIONS
3. RESULTS
4. EXAMPLES AND REMARKS

CHAPTER IV

COINCIDENCES AND FIXED POINTS FOR NONEXPANSIVE TYPE MULTIVALUED MAPS

1. PRELIMINARIES
2. RESULTS
3. EXAMPLES AND REMARKS

CHAPTER V

FIXED POINTS FOR T-ORBITALLY CONTINUOUS MAPS

1. PRELIMINARIES
2. RESULTS

CHAPTER VI

FIXED POINT THEOREMS IN FUZZY METRIC SPACES

1. PRELIMINARIES
2. NOTATIONS AND DEFINITIONS
3. RESULTS

First chapter is purely introductory in nature. A detailed introduction of Banach contraction principle and some of its famous generalizations is given. Concept of hybrid contractions introduced by Prof. S. L. Singh and Dr. C. Kulshrestha [159] is also included. At last L. Zadeh's [187] investigation of fuzzy sets and fuzzy metric spaces defined by Kramosil and Michelek [87] is introduced. It also contains some of the basic concepts which are used in rest of the work.

In 1922 S. Banach proved a famous fixed point theorem which creats a great interest and enthusiasm among mathematicians. With a view to generalize the Banach contraction principle Hicks and Rhoades [61] estabnlished a Banach type fixed point theorem on metric spaces. The theme of second chepter is to establish the fixed point theorems for a system of two maps by using the following contractive type condition:

For $x \in X$, $0 < h < 1$,

$$d(Tx, fTx) \leq hd(x, Tx).$$

Indeed, we prove the following :

THEOREM . Let (X, d) be a complete metric space. T is a continuous self-map of X. If there exists a map $f : X \to X$ such that $T(X) \subset f(X)$ and for all $x \in X$, $0 < k < 1$,

(1) $d(Tx, fTx) \leq kd(x, Tx)$

(1*) $d(fx, Tfx) \leq k d(x, fx)$

then T and f have a common fixed point in X.

By examples it is shown that main result of this chapter is a generalization of the results of Hicks and Rhoades. It also contains some of the well known fixed point theorems for pairs of maps as corollaries.

The third chapter is devoted to the study of coincidences and fixed points for multivalued and hybird contraction maps. The contractive type condition introduced by D. Delbosco [32] is extended and generalized for multivalued maps . The concept of hybrid contraction presented by Singh and Kulshrestha [159] is used to prove some coincidence theorems. In the last section of this chapter, it is shown by examples that our results and the result of Lj. B. Čirić [27] for generalized multivalued contractions are independent in each other.

Since it is not necessary that a nonexpansive map posseses a fixed point, hence it looks interesting to find out the conditions so that the fixed points for nonexpansive maps may exist. In fourth chapter we attempt to discuss the existence of coincidences and fixed points for nonexpansive type multivalued maps. Following is the main result of this chapter.

THEOREM. Let X be a metric space and T a multi-valued map from X to $C(X)$. If, there exists a map $f: X \to X$ such that $T(X) \subseteq f(X)$ and $f(X)$ is (T, f)-orbitally complete, and for each $x, y \in X$,

$$H(Tx, Ty) \leq a. \max \{ d(fx, fy), d(fx, Tx), d(fy, Ty), [(fx, Ty) + d(fy, Tx)] / 2\} + b. \max \{d(fx, Tx), d(fy, Ty)\} + c [d(fx, Ty) + d(fy, Tx)]$$

where $a \geq 0$, $b > 0$, $c > 0$ and $a + b + 2c = 1$,
then f and T have a coincidence, i.e., there exists a point z in X such that $fz \in Tz$.

The results of this chapter generalize the interesting result for nonexpansive type single-valued maps investigated by Lj. B. Čirić [29].

The fifth chapter contains Banach type fixed point theorems for multivalued and pairs of multivalued maps. In this chapter we study the following contractive type condition :
For $x \in X$, $y \in Tx$, $0 < k < 1$,

$$H(Tx, Ty) \leq k\, d(x, Tx).$$

A few fixed point theorems for some complicated contractive type conditions are obtained as corollaries.

The sixth and the last chapter deals about the existence of fixed points in fuzzy metric spaces. Using the concept of fuzzy mappings introduced by Grabiec [48] we establish some fixed point theorems for maps in fuzzy metric spaces. Our main result generalizes the result of Grabiec [48] and others and also extends the results of Hicks and Rhoades [61], Hicks [56] and [58] for fuzzy metric spaces.

* * * * *

प्रकाशन / PUBLICATIONS

1. "अभ्यतिप्राय प्रमेय", सारांश, गणित शोध गोष्ठी, हिंदी साहित्य सम्मेलन, प्रयाग द्वारा आयोजित, कुरूक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरूक्षेत्र, अप्रैल 23-24, 1993.

2. "Nonlinear ergodic theorems", Abstract, National Symposium on Ancient Science in India (Organized during third annual conference of Vijyana Parishad of India), H. N. B. Garhwal University, Srinagar (Garhwal), May 25-26, 1993.

3. "Fixed point theorems for multivalued nonexpansive type maps", Abstract, Conference on Mathematics for Industrial Development, Institute of Basic Science, Agra University, Agra, March 21-24, 1994.

4. "Coincidences and fixed points of nonexpansive type multivalued maps", (joint with S. N. Mishra and S. L. Singh), communicated.

5. "Extension of fixed point theorem of Hicks and Rhoades", (joint with S. L. Singh), communicated.

6. "Fixed point theorems for Banach type multivalued maps", (joint with S. N. Mishra and S. L. Singh), communicated.

